Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 1 : Espaces métriques.
Exercices à préparer pour la séance du 28 avril 2017:
exercices 2, 3, 4 et 8

Exercice 1.

1) Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbf{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :
(i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A\cup B)$, (iii) $\sup(A\cap B)$, (iv) $\inf(A\cup B)$, (v) $\inf(A\cap B)$.

a) Pour A une partie non vide de $\mathbf{R}$, un *majorant* de A est un réel $M \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in A \quad x \leqslant M.$$

Si A est un partie non vide et majorée, alors par définition $\sup A$ est le plus petit des majorants. On a les propriétés suivantes :

1) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;

2) $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;

3) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \sup(A\cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A\cap B \neq \varnothing$;

4) $\inf(A\cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;

5) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A\cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$ si $A\cap B \neq \varnothing$;

b) Prouvons les deux premières égalités,

1) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$: pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a $a \leqslant \sup A$ et $b \leqslant \sup B$ donc $a+b \leqslant \sup A + \sup B$, donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$ et comme $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$ alors $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$. Réciproquement, il existe une suite (a_n) d'éléments de A tel que cette suite converge vers $\sup A$, de même il existe une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $\sup B$, la suite $(a_n + b_n)$ est une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers $\sup A + \sup B$, donc la borne supérieure de $A+B$ est plus grande que $\sup A + \sup B$, soit $\sup(A+B) \geqslant \sup A + \sup B$. D'où l'égalité.

2) $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$: remarquons d'abord que si $P \subset Q$ alors $\sup P \leqslant \sup Q$: en effet $\sup Q$ est un majorant de Q donc de P (par l'inclusion $P \subset Q$), donc le plus petit des majorants, $\sup P$, pour P est plus petit que le majorant particulier $\sup Q$. Appliquons ceci à $A \subset A\cup B$ donc $\sup A \leqslant \sup(A\cup B)$ et pour $B \subset A\cup B$ on obtient $\sup B \leqslant \sup(A\cup B)$. On vient de prouver $\sup(A\cup B) \geqslant \max(\sup A, \sup B)$. Pour l'autre inégalité : soit $M = \max(\sup A, \sup B)$. Pour $x \in A\cup B$ alors soit $x \in A$ et alors $x \leqslant \sup A \leqslant M$, ou soit $x \in B$ et alors $x \leqslant \sup B \leqslant M$; donc quelque soit $x \in A\cup B$, $x \leqslant M$ donc M est un majorant de $A\cup B$, donc $\sup(A\cup B) \leqslant M = \max(\sup A, \sup B)$.

2) Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $A \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(x,A) = \inf_{a\in A} ||x-a||$. Trouver $d(0, \mathbf{R}-\mathbf{Q})$, $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q})$, $d(M, \mathcal{D})$ où $M = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite de vecteur unitaire (a,b,c).

a) $d(0, \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}) = 0$, regarder des éléments du type $\frac{\sqrt{2}}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

b) $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q}) = 0$, c'est la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ ou alors regarder la suite définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}), n \in \mathbf{N}$, qui est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$.

c) On suppose que $\mathcal{D}$ passe par l'origine, alors $d(M, \mathcal{D}) = x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)^2$.

3) Pour $A, B \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} ||a-b||$. Trouver $d(A, B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \; ; \; xy = 1\}$ et B une asymptote.

$d(A, B) = 0$.

4) On définit $\operatorname{diam}(A) = \sup_{a,b\in A} ||a-b||$, le *diamètre* de A. Que valent les diamètres $\operatorname{diam}(]0, 1[\cap\mathbf{Q})$ et $\operatorname{diam}([0, 1] \cap \mathbf{R} - \mathbf{Q})$?

$\operatorname{diam}(]0, 1[\cap\mathbf{Q}) = 1 = \operatorname{diam}([0, 1] \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}))$.

Exercice 2. Sur $M_N(\mathbf{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on définit l'application $\|\cdot\| \to \mathbf{R}_+$ par :

$$\|A\| := \max_{i=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}|$$

où $A = [A_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant N}$.

Remarque : il peut être utile de remarquer que cette application attache à toute matrice le maximum des normes ℓ^1 de ses vecteurs lignes.

1) Après avoir vérifié qu'on a ainsi défini une norme, prouver que l'on a :

$$\|A\,B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$$

pour toutes $A, B \in M_N(\mathbf{K})$.

Tout d'abord, la fonction sur les matrices proposée est bien une fonction (positivement) homogène et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Si une matrice A satisfait $\|A\| = 0$, alors par définition $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| = 0$ pour tout i, ce qui implique que $a_{ij} = 0$ pour tous les indices i et j. Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire : on se donne $A = [A_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ et $B = [B_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant N}$; alors

$$\|A + B\| = \max_{i=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij} + B_{ij}|.$$

Mais à indices i, j fixés, on a : $|A_{ij} + B_{ij}| \leqslant |A_{ij}| + |B_{ij}|$, et donc à indice i fixé on a :

$$\sum_{j=1}^{N} |A_{ij} + B_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| + |B_{ij}| = \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| + \sum_{j=1}^{N} |B_{ij}|.$$

Par définition de $\|\cdot\|$, on a : $\sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| \leqslant \|A\|$ et $\sum_{j=1}^{N} |B_{ij}| \leqslant \|B\|$, de sorte que

$$\sum_{j=1}^{N} |A_{ij} + B_{ij}| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

pour chaque indice i. On obtient finalement l'inégalité triangulaire en prenant le maximum des membres de gauche pour i entre 1 et N. Ainsi $\|\cdot\| \to \mathbf{R}_+$ est bien une norme.

L'inégalité supplémentaire à vérifier s'appelle *sous-multiplicativité ;* justifions-la. Notons $AB = C = [C_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant N}$. Par définition du produit matriciel, à indice i fixé, on a :

$$\sum_{j=1}^{N} |C_{ij}| = \sum_{j=1}^{N} |\sum_{k=1}^{N} A_{ik}B_{kj}| \leqslant \sum_{j,k=1}^{N} |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| = \sum_{k=1}^{N} (\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}|)|A_{ik}|.$$

Puisque $\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}| \leqslant |B|$, et $\sum_{k=1}^{N} |A_{ik}| \leqslant |A|$, cela donne successivement :

$$\sum_{j=1}^{N} |C_{ij}| \leqslant |B| \cdot (\sum_{k=1}^{N} |A_{ik}|) \leqslant |A| \cdot |B|,$$

et finalement l'inégalité cherchée en prenant le maximum sur les indices i.

2) Prouver que la norme $\| \cdot \|$ ci-dessus est subordonnée à la norme sup $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbf{K}^N$, qui est définie par $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$.

Avec les notations qui précèdent, et par définition de l'action d'une matrice sur un vecteur et de la norme sup, on a : $\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |\sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j|$. On veut majorer le plus finement possible cette quantité pour tout $\|x\|_\infty \leqslant 1$, c'est-à-dire pour tous les vecteurs x dont le module de chaque coordonnée est $\leqslant 1$.

Déjà, à indice i fixé, on a : $|\sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}|$, et en passant au maximum sur i, on obtient que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|A\|$ pour tout $\|x\|_\infty \leqslant 1$.

Si on trouve x tel que $\|x\|_\infty \leqslant 1$ et $\|Ax\|_\infty = \|A\|$, on aura démontré l'égalité de normes cherchée. Par définition de $\|A\|$ comme maximum sur un ensemble fini, il existe un indice i_0 tel que $\|A\| = \sum_{j=1}^{N} |A_{i_0 j}|$. Pour chaque indice j il existe un nombre z_j de module 1 tel que $A_{i_0 j} z_j = |A_{i_0 j}|$, et il suffit alors de prendre le vecteur $x = (z_j) \in \mathbf{K}^N$.

3) Retrouver le résultat de la question 1).

Quelle que soit la norme $| \cdot |$ sur l'espace vectoriel sous-jacent $\mathbf{K}^N$, la norme $\| \cdot \|$ sur $M_N(\mathbf{K})$ subordonnée à celle-ci vérifie l'inégalité recherchée (sous-multiplicativité). Rappelons la raison de ce fait. Soient A et B des matrices dans $M_N(\mathbf{K})$. Par définition d'une norme subordonnée, on a successivement :

$$|(AB)x| = |A(Bx)| \leqslant \| A \| \cdot |Bx| \leqslant \| A \| \cdot \| B \| \cdot |x|,$$

pour tout x. En prenant la borne supérieure sur les vecteurs x de norme 1, on justifie bien la sous-multiplicativité de n'importe quelle norme subordonnée.

4) Quelle est la norme sur $M_N(\mathbf{K})$ subordonnée à la norme $\| \cdot \|_1$ sur $\mathbf{K}^N$, qui est définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$?

On a

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |\sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j| \leqslant \sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| \cdot |x_j|) = \sum_{j=1}^{N} (\sum_{i=1}^{N} |A_{ij}|) |x_j| .$$

Il existe un indice j_0 (dépendant de A mais pas de x) tel que

$$\sum_{i=1}^{N} |A_{ij_0}| = \max_j \sum_{i=1}^{N} |A_{ij}| .$$

Alors, en notant M ce maximum et en pousuivant le calcul précédent, on voit que $\|Ax\|_1 \leqslant M\|x\|_1$. Il reste à choisir le vecteur e_{j_0} de la base canonique de $\mathbf{K}^N$: il satisfait $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ et $\|Ae_{j_0}\|_1 = M$ puisque Ae_{j_0} est le j_0-ième vecteur colonne de A. Ceci fait voir que la norme subordonnée à $\|\cdot\|_1$ est l'application $A \mapsto \max_j \sum_{i=1}^{N} |A_{ij}|$.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Prouver que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X.

Soit U un ouvert de X. Notons Y le complémentaire de U dans X, c'est un fermé de X. Considérons d_Y la fonction distance à Y ; par l'inégalité triangulaire, cette fonction diminue les distances et donc est continue. On définit alors $Z_n = d_Y^{-1}([1/n, +\infty[)$. Comme d_Y est continue et que $[1/n, +\infty[$ est un fermé de $\mathbf{R}$, la partie Z_n est un fermé de X. Comme $Y = d_Y^{-1}(\{0\})$, on a bien $Z_n \subset U = X \backslash d_Y^{-1}(\{0\})$. Comme $\mathbf{N}^*$ est dénombrable, il reste à prouver que $U = \bigcup_{n \geqslant 1} Z_n$. C'est une conséquence de la suite d'égalités

$$U = d_Y^{-1}(]0, +\infty[) = d_Y^{-1}(\bigcup_{n\geqslant 1}[1/n, +\infty[) = \bigcup_{n\geqslant 1} d_Y^{-1}([1/n, +\infty[) = \bigcup_{n\geqslant 1} Z_n.$$

En conclusion tout ouvert de X est bien réunion dénombrable de fermés de X.

Exercice 4. On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbf{Z}$, est dense dans $\mathbf{R}$.

1) Remarquer que D est stable par addition et multiplication.

Soient $d = p + q\sqrt{2}$ et $d' = p' + q'\sqrt{2}$ deux éléments de D. Alors $d + d' = (p + p') + (q + q')\sqrt{2}$ est un élément de D et $dd' = (pp' + 2qq') + (pq' + p'q)\sqrt{2}$ aussi.

2) Posons $u = \sqrt{2} - 1$; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$.

En déduire le résultat.

On a $u < 1$ donc u^k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc pour $\varepsilon = b - a$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que si $k \geqslant n$ on a $u^k < \varepsilon = b - a$. En particulier $u^n < b - a$. Si on cherchait un réel alors $r = \frac{a}{u^n} + 1$ conviendrait, mais on cherche un entier, posons $m = E(\frac{a}{u^n}) + 1$. Alors $m - 1 \leqslant \frac{a}{u^n} < m$. L'inégalité de droite donne $a < mu^n$. L'inégalité de gauche s'écrit aussi $mu^n - u^n \leqslant a$ soit $mu^n \leqslant a + u^n < a + b - a = b$ donc $a < mu^n < b$.

Déduisons de cela que D est dense dans $\mathbf{R}$: pour tout intervalle $[a, b]$, $a < b$ il existe m, n des entiers tels que $mu^n \in [a, b]$. Or mu^n est dans D car $u \in D$ donc par multiplication $u^n \in D$.

Exercice 5. Montrer que dans tout espace métrique (E, d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ ne coïncide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a, r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbf{R}^2, ||.||_\infty)$, $E = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $1/2$).

Cet exercice justifie la terminologie « boule fermée ». Il s'agit de montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ensemble ouvert. Il est vivement conseillé de faire un dessin. Soit $C = E \setminus B'(a, r)$. Soit $x \in C$, on cherche une boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ contenue dans C. Comme $x \in C$, $x \notin B'(a, r)$ donc $d(a, x) > r$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < d(a, x) - r$. Montrons que $B(x, \varepsilon) \subset C$: pour $y \in B(x, \varepsilon)$, l'inégalité triangulaire $d(a, x) \leqslant d(a, y) + d(y, x)$ donc $d(a, y) \geqslant d(a, x) - d(y, x) \geqslant d(a, x) - \varepsilon > r$. Comme $d(a, y) > r$ alors $y \notin B'(a, r)$ donc $y \in C$. Comme la preuve est valable quelque soit $y \in B(x, \varepsilon)$, donc $B(x, \varepsilon) \subset C$. Et donc C est un ouvert.

Pour $a = (\frac{1}{2}, 0)$ et $r = \frac{1}{2}$ on a $B'(a,r) = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$, $B(a,r) =]0,1[\times \{0\}$ et $\overline{B(a,r)} = [0,1] \times \{0\}$.

Exercice 6. $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1) Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a,r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$.

On note $B = B(a,r)$, $B' = B'(a,r)$, $\bar{B} = \overline{B(a,r)}$. Il faut montrer $B' = \bar{B}$. B' est une boule fermée, donc un fermé contenant B, alors que $\bar{B}$ est le plus petit fermé contenant B, donc $\bar{B} \subset B'$.

Étudions l'inclusion inverse : soit $x \in B'$, il faut montrer $x \in \bar{B}$. Si $x \in B$ alors $x \in \bar{B}$, supposons donc que $x \notin B$, alors $\|x - a\| = r$. Soit $B(x, \varepsilon)$ un boule centrée en x. x est adhérent à B si $B(x,\varepsilon) \cap B$ est non vide quelque soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit le point

$$y = x - \frac{\varepsilon}{2} \frac{x-a}{\|x-a\|}.$$

Faire un dessin et placer y sur ce dessin. D'une part $y \in B(x,\varepsilon)$ car $\|y - x\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. D'autre part $y \in B = B(a,r)$ car

$$\|y - a\| = \|x - a - \frac{\varepsilon}{2} \frac{x-a}{\|x-a\|}\| = \|x-a\|(1 - \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r.$$

Donc $y \in B \cap B(x,\varepsilon)$, ce qui prouve que $B' \cap \bar{B}$. Donc $B' = \bar{B}$.

2) Montrer que $\overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(b,R) \iff r \leqslant R$ et $||a-b|| \leqslant R - r$.

Pour le sens $\Leftarrow$: soit $x \in \bar{B}(a,r)$ alors

$$\|x - b\| = \|x - a + a - b\| \leqslant \|x-a\| + \|a-b\| \leqslant r + R - r \leqslant R,$$

donc $x \in \bar{B}(b,R)$.

Pour le sens $\Rightarrow$: soit

$$x = a + r\frac{a-b}{\|a-b\|},$$

alors $\|x-a\| = r$ donc $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$, donc $\|x - b\| \leqslant R$ or $\|x-b\| = \|a-b\| + r$ (c'est le même calcul que pour la question précédente). Donc $\|a-b\| + r \leqslant R$, soit $0 \leqslant \|a-b\| \leqslant R - r$ et en particulier $r \leqslant R$.

Exercice 7.

1) Si $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on pose $||(x,y)|| = \max(|x+y|, |x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbf{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.

a) Si $||(x,y)|| = 0$ alors $\max(|x+y|, |x-2y|) = 0$ donc $x+y = 0$ et $x - 2y = 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$. Réciproquement $\|(0,0)\| = 0$.

b) $||\lambda.(x,y)|| = ||(\lambda x, \lambda y)|| = \max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - 2\lambda y|) = |\lambda| \max(|x+y|, |x-2y|) = |\lambda|.||(x,y)||$.

c) $\|(x,y) + (x',y')\| = \|(x+x', y+y')\| = \max(|x+x'+y+y'|, |x+x'-2y-2y'|) \leqslant \max(|x+y| + |x'+y'|, |x-2y| + |x'-2y'|) \leqslant \max(|x+y|, |x-2y|) + \max(|x'+y'|, |x'-2y'|) \leqslant ||(x,y)|| + ||(x',y')||$.

La boule unité fermée centrée à l'origine est la région du plan comprise entre les droites d'équations $x+y = +1$, $x+y = -1$, $x - 2y = +1$, $x - 2y = -1$.

2) Soit p, q deux normes sur $\mathbf{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que

$$B_q \subset B_p \Longleftrightarrow p \leqslant q.$$

Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Exemples.

Sens $\Leftarrow$: Si $x \in B_q$ alors $q(x) \leqslant 1$ donc $p(x) \leqslant 1$ donc $x \in B_p$. Sens $\Rightarrow$: Soit $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ alors $q(\frac{x}{q(x)}) = 1$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_q$ donc $\frac{x}{q(x)} \in B_p$ donc $p(\frac{x}{q(x)}) \leqslant 1$ soir $p(x) \leqslant q(x)$. Ceci étant aussi valable pour $x = 0$.

$B_q \subset 2B_p$ est équivalent à $p(x) \leqslant 2q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ (attention au sens !). Et $\frac{1}{2}B_p \subset B_q$ est équivalent à $\frac{1}{2}q(x) \leqslant p(x)$. Si les deux inclusions sont vraies alors $\frac{1}{2}p \leqslant q \leqslant 2p$ et en particulier les normes p et q sont équivalentes.

Par exemple, dans $\mathbf{R}^2$ pour les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$, on a :

$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty \subset 2B_1 \subset 2B_2 \subset \cdots$$

Exercice 8. On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) d définie par $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ en notant ici $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ et $x = (y_n)_{n \geqslant 0}$.

1) Montrer que Y est fermé dans X.

Une suite de l^∞ est notée $(x^p)_{p \in \mathbf{N}}$, pour chaque $p \geqslant 0$, x^p est elle même une suite $x^p = (x^p(0), x^p(1), x^p(2), \ldots)$. Il faut montrer que Y est fermé dans X. Soit donc (x^p) une suite de Y qui converge vers $x \in X$. Il faut donc montrer qu'en fait $x \in Y$, c'est-à-dire que $x = (x(0), x(1), \ldots)$ est une suite tendant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ comme $x^p \to x$ alors il existe P tel que si $p \geqslant P$ on ait $d(x^p, x) < \varepsilon$. Par la définition de d on a pour $p \geqslant P$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x^p(n) - x(n)| < \varepsilon$. Fixons $p = P$, alors $x^P \in Y$ donc x^P est une suite tendant vers 0, donc il existe N tel que si $n \geqslant N$ alors $|x^P(n)| < \varepsilon$. Réunissons tout cela, pour $n \geqslant N$:

$$|x(n)| = |x(n) - x^P(n) + x^P(n)| \leqslant |x(n) - x^P(n)| + |x^P(n)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc la suite x tend vers 0, donc $x \in Y$ et Y est fermé.

2) Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Notons Z l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Pour

$$y = (y(0), y(1), y(2), \ldots) \in Y,$$

définissons la suite $y^0 = (y(0), 0, 0, \ldots)$, $y^1 = (y(0), y(1), 0, 0, \ldots)$,...

$$y^p = (y(0), \ldots, y(p-1), y(p), 0, 0, 0, \ldots).$$

La suite (y^p) est bien une suite d'éléments de Z. De plus $d(y^p, y) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |y^p(n) - y(n)| = \sup_{n > p} |y(n)|$ or la suite $y(n)$ tend vers 0 donc $d(y^p, y)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

On montre facilement (par l'absurde) que l'élément $x = (1, 1, 1, \ldots) \in X$ n'est limite d'aucune suite d'éléments de Z, (ni d'ailleurs de Y).

Exercice 9. Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble convexe (i.e. X contient tous les segments dont les extrémités sont dans X). Prouver que son intérieur $\mathring{X}$ et son adhérence $\overline{X}$ sont convexes.

Exercice 10.

1) Montrer que $||f||_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ sont deux normes sur $C([0,1],\mathbf{R})$. Sont-elles équivalentes ?

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty$. Donc $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ Par contre il n'existe aucune constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f. Pour montrer ceci par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour tout f de $C([0,1],\mathbf{R})$. Regardons les fonctions f_k définies par $f_k(x) = 2k(1-kx)$ si $x \in [0,\frac{1}{k}]$ et $f_k(x) = 0$ si $x > \frac{1}{k}$. Alors $f_k \in C([0,1],\mathbf{R})$ et $\|f_k\|_\infty = 2k$ alors que $\|f_k\|_1 = 1$. On obtient $2k \leqslant C.1$ ce qui est contradicoire pour k assez grand. Cela prouve que les normes ne sont pas équivalentes.

2) Les deux métriques associées définissent-elles la même topologie ?

Exercice 11. Soit $E = C^1([0,1],\mathbf{R})$. Comparer les normes $N_1(f) = ||f||_\infty$, $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1$, $N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty$, $N_4(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

1) On montre facilement

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant 2N_1 \leqslant 2N_4 \leqslant 2N_3.$$

2) Par contre il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ ou $N_2 \leqslant CN_4$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_4$ on regarde f_k définie par $f_k(x) = x^k$, après calcul on obtient $N_3(f_k) = k+1$ et $N_4(f_k) = 2$, pour k suffisament grand on obtient une contradiction. Comme N_1 et N_2 sont équivalentes on va prouver qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $N_3 \leqslant CN_1$. On prend g_k, définie par $g_k(x) = 1 + \sin(2\pi kx)$. Alors $N_1(g_k) = 2$ et $N_3(g_k) = 4k$, ce qui prouve le résultat souhaité.

Exercice 12. Soit $\mathbf{R}^n$ considéré comme groupe additif muni de sa topologie usuelle. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}^n$.

1) On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que tout point est isolé, que G est discret et fermé dans $\mathbf{R}^n$.

On se restreint maintenant au cas $n = 1$.

2) Montrer qu'alors, G est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbf{Z}$, $a > 0$.

3) Montrer que si 0 est point d'accumulation, G est partout dense dans $\mathbf{R}$. En déduire ainsi les sous-groupes fermés de $\mathbf{R}$.

4) On considère $\alpha \notin \mathbf{Q}$; montrer que $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbf{R}$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi n\alpha})_{n\in\mathbf{Z}}$.