



# Topologie et espaces de fonctions



# 1. Compacité et evn de dimension infinie



Voici un résultat célèbre sur les espaces vectoriels normés, le théorème de Riesz, qui relie une propriété algébrique (de dimension) à une propriété topologique (compacité des parties fermées et bornées les plus naturelles : les boules fermées).

## Théorème (théorème de Riesz)

*Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Alors  $E$  est de dimension finie si, et seulement si, sa boule-unité fermée  $B_f(0, 1)$  est compacte.*

Dans tous les cas, les boules fermées sont bornées (par définition) et fermées. Si en outre  $E$  est de dimension finie, le théorème de Borel-Lebesgue décrit toutes les parties compactes comme étant les parties fermées et bornées ; il implique donc que dans ce cas les boules fermées sont compactes. Pour prouver le théorème de Riesz, il reste donc à prouver l'implication

$$\dim(E) = \infty \quad \Rightarrow \quad B_f(0, 1) \text{ est non compacte.}$$



Avant de passer à la démonstration de l'implication restante :

$$\ll \dim(E) = \infty \quad \Rightarrow \quad B_f(0, 1) \text{ est non compacte} \gg$$

donnons un exemple de boule-unité fermée non compacte dans un espace de fonctions.

**Exemple :** la boule-unité fermée de  $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$  n'est pas compacte. En effet, considérons la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$f_n(x) = x^n.$$

La seule limite possible est la fonction qui vaut 0 sur  $[0, 1[$  et 1 quand  $x = 1$ . Or, cette fonction n'est pas continue.



Voici le résultat le plus important pour démontrer l'implication ci-dessus.

## Lemme (lemme de Riesz)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ , distinct de  $E$ . Alors, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe  $x \in E$  tel que

$$\|x\| = 1 \quad \text{et} \quad \inf_{y \in F} \|x - y\| \geq 1 - \varepsilon.$$

**Remarque** : si  $Y$  est une partie de  $E$  et si  $x \in E$ , on note  $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ . Par définition d'une borne inférieure, on a  $d(x, Y) = 0$  si et seulement si  $x \in \bar{Y}$ . En effet, ces deux conditions sont équivalentes à l'existence d'une suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  dans  $Y$  telle que  $\lim z_n = x$ .

**Reformulation** : ce lemme dit que si  $F$  est un sous-espace vectoriel *fermé strict* d'un evn  $E$ , alors pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  on peut toujours trouver un vecteur dans la sphère-unité  $S_E(0, 1)$  de  $E$  qui est à distance  $\geq 1 - \varepsilon$  de  $F$ .



**Preuve.** Soit  $y \notin F$ . Comme  $F$  est fermé (i.e.  $F = \overline{F}$ ), on a  $y \notin \overline{F}$ . Par la remarque qui précède, cela implique  $d(y, F) > 0$ ; notons  $\alpha = d(y, F)$ .

Puisque  $1 < \frac{1}{(1-\varepsilon)}$  (et donc  $\alpha < \frac{\alpha}{(1-\varepsilon)}$ ), la définition de  $\alpha = d(y, F)$  comme borne inférieure implique qu'il existe  $z \in F$  tel que

$$\|y - z\| \leq \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

Puisque  $y \notin F$ , on a  $\|y - z\| \neq 0$ ; donc afin d'obtenir un vecteur sur la sphère-unité on peut normaliser et poser :

$$x = \frac{y - z}{\|y - z\|}.$$

# Démonstration du lemme de Riesz, suite et fin



Pour tout  $z' \in F$ , on a :

$$\|x - z'\| = \left\| \frac{y - z}{\|y - z\|} - \frac{\|y - z\|}{\|y - z\|} z' \right\| = \frac{1}{\|y - z\|} \|y - (z + \|y - z\| z')\|,$$

Comme  $z + \|y - z\| z' \in F$ , on en déduit que  $\|y - (z + \|y - z\| z')\| \geq \alpha$ , soit :

$$\|x - z'\| \geq \frac{1}{\|y - z\|} \alpha.$$

Enfin, comme

$$\|y - z\| \leq \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\|y - z\|} \geq \frac{1 - \varepsilon}{\alpha},$$

on conclut que

$$\|x - z'\| \geq \frac{\alpha}{\|y - z\|} \geq 1 - \varepsilon$$

pour tout  $z' \in F$ , ce qui termine la démonstration.

# Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé



Toujours pour prouver l'implication non immédiate du théorème de Riesz, on va aussi utiliser le lemme suivant.

## Lemme

*Dans un espace vectoriel normé, un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

**Preuve.** On utilise le critère séquentiel (de fermeture) : on se donne  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $F$ , admettant une limite dans  $E$ , disons  $x$  ; il s'agit de voir qu'en fait  $x \in F$ .

En tant que suite convergente  $(x_n)_{n \geq 0}$  est bornée : il existe  $R > 0$  tel que  $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset B_f(0, R)$ . Mais  $B_f(0, R) \cap F$  est une boule fermée de  $F$ , donc un compact puisque  $\dim(F) < \infty$  (on utilise Borel-Lebesgue dans  $F$  de dimension finie). Par Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  qui converge dans  $F$ . Par unicité, cette limite doit être  $x$ , d'où l'on déduit que  $x \in F$ . □

# Démonstration du théorème de Riesz



**Preuve.** On suppose que  $E$  n'est pas de dimension finie. On va construire une suite de vecteurs  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sur la sphère-unité  $S_E(0, 1)$  de  $E$  tels que pour tous  $m \neq n$  on ait

$$\|e_m - e_n\| \geq 1/2.$$

Cette suite ne peut admettre de valeur d'adhérence car, par construction, aucune de ses sous-suites n'est de Cauchy.

On commence par se donner un vecteur arbitraire  $e_0 \in S_E(0, 1)$ . Ensuite, on suppose construite la suite désirée jusqu'au rang  $n$  et on note  $F_n$  le sous-espace vectoriel engendré par les  $n + 1$  premiers vecteurs  $e_0, \dots, e_n$  : c'est un sev de dimension finie de  $E$ , donc strict, et fermé par le lemme précédent. En utilisant le lemme de Riesz pour  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , on obtient un vecteur  $e_{n+1} \in S_E(0, 1)$  à distance  $\geq \frac{1}{2}$  de  $F_n$ , et donc des vecteurs  $e_i$  précédents.

On vient de vérifier qu'on peut construire la suite désirée par récurrence, et cette suite contredit la compacité de la boule-unité fermée de  $E$  (le critère de Bolzano-Weierstrass n'est pas satisfait par  $S_E(0, 1)$ , et donc pas non plus par la boule-unité fermée).





Le théorème de Riesz est plutôt un résultat négatif puisqu'il dit que les boules fermées dans les evn de dimension infinie (typiquement les espaces de fonctions munis d'une norme) sont non compactes. Il y a au moins deux façons de contourner cette difficulté.

- La première est assez élaborée, elle consiste à travailler avec des espaces vectoriels dont la topologie est construite plus subtilement qu'à partir d'une seule norme. C'est une approche largement exploitée en analyse fonctionnelle plus avancée (mais pas ici).
- La seconde consiste à ajouter des hypothèses au fait d'être fermé et borné pour assurer la compacité.

On va se concentrer sur la seconde approche, dans le cas où l'espace vectoriel normé est l'espace  $\mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  des fonctions continues d'un espace métrique compact  $X$  vers  $\mathbf{K}$  ( $= \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ), muni de la norme  $\| \cdot \|_{\infty}$ .



## Définition

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Soit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  une famille d'applications continues de  $X$  vers  $\mathbf{K}$ .

On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est **équicontinue** en  $x \in X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall y \in X, \quad (d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est **équicontinue** sur  $X$  si elle est équicontinue en tout  $x \in X$ .

**Exemple** : soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. Fixons  $k > 0$  et considérons

$$\mathcal{F}_k = \{f \in \mathcal{C}(X; \mathbf{K}) : |f(x) - f(y)| \leq k d(x, y)\}$$

l'ensemble des fonctions  $k$ -lipschitziennes définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbf{K}$ . Cette famille est équicontinue sur  $X$  (prendre  $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$  dans la condition de la définition ci-dessus).

# Un non-exemple d'équicontinuité



En termes de définition «  $(\varepsilon, \delta)$  » de la continuité des applications, la condition d'équicontinuité en  $x$  est une condition d'uniformité de la constante  $\delta$  par rapport à toutes les fonctions de la famille  $\mathcal{F}$  considérée : étant donné un  $\varepsilon > 0$  fixé, il existe un  $\delta > 0$  tel que *pour toute*  $f \in \mathcal{F}$  on ait :

$$f(B(x, \delta)) \subset ]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[.$$

**Non-exemple** : dans l'espace  $\mathcal{C}([-1, 1]; \mathbf{R})$ , considérons la famille

$$\mathcal{F} = \{s_n : x \mapsto \sin(nx)\}_{n \geq 1}.$$

Alors  $\mathcal{F}$  n'est pas équicontinue sur  $[-1, 1]$ .

Par exemple, elle n'est pas équicontinue en 0 car pour tout  $\delta > 0$  on peut trouver un indice  $n$  tel que  $s_n(] - \delta; \delta [) = [-1; 1]$  : l'équicontinuité est contredite avec n'importe quel  $\varepsilon \leq 1$ .

# Un exemple non-lipschitzien d'équicontinuité



**Exemple** : on considère  $X = [0, 1]$  muni de la distance usuelle et

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbf{R}) : \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq 1 \right\}.$$

Remarquons que, si  $f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbf{R})$  et si  $x < y$ , on peut écrire

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité

$$|f(y) - f(x)| \leq \left( \int_x^y |f'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} |y - x|^{\frac{1}{2}} \leq |y - x|^{\frac{1}{2}},$$

pourvu que  $f \in \mathcal{F}$ . En prenant  $\delta = \varepsilon^2$ , on voit que  $\mathcal{F}$  est équicontinue sur  $[0, 1]$ .

# Énoncé du théorème d'Ascoli

Revenons enfin à un énoncé qui fournit une condition suffisante de compacité dans l'espace de fonctions  $\mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  muni de la norme  $\| \cdot \|_{\infty}$ .

## Théorème (théorème d'Ascoli)

*Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. On se donne une famille de fonctions  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  et on fait les hypothèses suivantes.*

- (i) *La famille  $\mathcal{F}$  est équicontinue sur  $X$ .*
- (ii) *Pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$  est borné.*

*Alors, de toute suite dans  $\mathcal{F}$  on peut extraire une sous-suite qui converge dans  $(\mathcal{C}(X; \mathbf{K}), \| \cdot \|_{\infty})$ .*

Cet énoncé est une condition suffisante pour qu'une suite de fonctions sur un ensemble compact admette une limite uniforme. C'est donc un résultat important dans le sens où c'est un énoncé d'existence (de fonction définie comme limite).



**Exemple :** soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{K})$ . On fait les hypothèses suivantes.

(i) Il existe une constante  $k > 0$  telle que pour tout  $n \geq 0$  et pour tous  $x, y \in [0, 1]$

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq k |y - x|.$$

(ii) Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \geq 0$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| \leq C.$$

Alors (par Ascoli), on peut extraire de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  une sous-suite qui converge dans  $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ , c'est-à-dire une sous-suite qui converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

Autrement dit, il existe une fonction continue  $f$  sur  $[0; 1]$  qui est limite uniforme d'une sous-suite de  $(f_n)_{n \geq 0}$ .



## 2. Densité et convergence uniforme



La notion de *densité* est une notion que nous retrouverons fréquemment dans ce cours. Ici  $(X, d)$  est un espace métrique. Voici la définition dans le cadre général des espaces métriques.

## Définition

Soit  $Y \subset X$ . On dit que  $Y$  est **dense** dans  $(X, d)$  si on a :  $\overline{Y} = X$ .  
De manière équivalente,  $Y \subset X$  est dense dans  $(X, d)$  si

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset.$$

Ou encore : tout point de  $X$  est limite d'une suite d'éléments de  $Y$ .

## Exemples.

1. Les parties  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$  sont denses dans  $\mathbf{R}$ .
2. On peut voir que l'espace  $\mathbf{R}[\mathbf{X}]$  des fonctions polynomiales sur  $\mathbf{R}$  n'est pas dense dans  $\mathcal{C}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  muni de la distance :  $d_\infty(f, g) = \min(1, \sup_{\mathbf{R}} |f - g|)$ .



La notion de densité est très importante dans le cas où les espaces topologiques  $X$  sont des espaces de fonctions (qu'on appelle désormais *espaces fonctionnels*).

Par exemple, dans le cas d'un espace  $X = \mathbf{R}^N$  (muni de n'importe quelle norme), l'espace  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$  des fonctions indéfiniment dérivables sur  $X$  et nulles en dehors d'un compact (non fixé), va être dense dans de nombreux espaces fonctionnels.

Ce type de densité d'un espace fonctionnel dans de multiples autres espaces permet de transférer des définitions, des propriétés etc. d'un espace fonctionnel à un autre (voir, par exemple, ce qu'on fera avec la transformation de Fourier).

# Convergences simple et uniforme

Faisons quelques rappels sur certaines convergences de suites de fonctions. On se donne pour cela  $(X, d)$  un espace métrique.

On dit qu'une suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  de  $X$  dans  $\mathbf{K}$  *converge simplement* sur  $X$  s'il existe une fonction  $f : X \rightarrow \mathbf{K}$  telle que pour tout  $x \in X$  on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Dans ce cas  $f$  est appelée la *limite simple* de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$ .

On dit qu'une suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  *converge uniformément* sur  $X$  s'il existe une fonction continue  $f : X \rightarrow \mathbf{K}$  telle que pour tout  $x \in X$  on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0.$$

Dans ce cas  $f$  est appelée la *limite uniforme* de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$ .

Si  $f$  est limite uniforme de  $(f_n)_{n \geq 0}$ , alors elle est automatiquement limite simple de cette suite.

# Énoncé du théorème de Dini

Le théorème de Dini est un moyen de déduire la convergence uniforme d'une suite de fonctions qui converge simplement, pourvu que cette suite satisfasse une condition de monotonie.

On dit à ce propos qu'une suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  de  $X$  dans  $\mathbf{R}$  est *croissante* (resp. *décroissante*) si pour tout  $x \in X$  la suite numérique  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  l'est.

## Théorème (théorème de Dini)

*Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbf{R}$ . On fait les hypothèses suivantes.*

- (i) La suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers  $f$  dans  $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ .*
- (ii) La suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est monotone, c'est-à-dire ou bien décroissante ou bien croissante.*

*Alors  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers  $f$ , c'est-à-dire converge vers  $f$  pour la norme  $\| \cdot \|_{\infty}$ .*

Ce théorème est bien adapté aux séries de fonctions positives ; il nous sera utile en théorie de l'intégration.

# Ensembles de fonctions stables par passage au maximum

Nous allons commencer par un lemme dont la preuve permet de voir le rôle joué par la compacité de  $X$  et la relation d'ordre sur  $\mathbf{R}$ .

## Lemme

*Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$  telle que si  $u_1$  et  $u_2$  sont dans  $\mathcal{H}$ , alors  $\max(u_1, u_2) \in \mathcal{H}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ . On suppose que pour tout  $y \in X$  il existe  $u_y \in \mathcal{H}$  telle que  $u_y(y) > f(y)$ . Alors il existe  $v \in \mathcal{H}$  telle que  $v(x) > f(x)$  pour tout  $x \in X$ .*

**Preuve.** Pour chaque  $y \in X$ , note  $U_y = \{x \in X : u_y(x) > f(x)\}$  : c'est un ouvert car c'est l'image réciproque de  $\mathbf{R}_+^\times$  par la fonction continue  $u_y - f$  ; en outre  $y \in U_y$ . Par compacité de  $X$ , qui est réunion de tous les  $U_y$ , on peut écrire  $X = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_p}$  pour des  $y_i$  convenables et en nombre fini.

Par récurrence finie, la fonction  $v : x \mapsto \max\{u_{y_1}(x); u_{y_2}(x); \dots; u_{y_p}(x)\}$  est dans  $\mathcal{H}$ . Elle convient car un élément quelconque  $x \in X$  est dans un  $U_{y_i}$  au moins et on peut écrire :

$$v(x) \geq u_{y_i}(x) > f(x).$$



**Preuve.** On travaille dans le cas où la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est croissante (cas auquel on peut toujours se ramener, quitte à opposer les fonctions). Alors, par monotonie la famille  $\mathcal{H} = \{f_n\}_{n \geq 0}$  est stable par passage au maximum car pour  $m \geq n$ , on a :  $\max\{f_n; f_m\} = f_m$ .

Maintenant on se donne  $\varepsilon > 0$ .

Par convergence simple, pour tout  $y \in X$  il existe  $u \in \mathcal{H}$  telle que  $u(y) > f(y) - \varepsilon$ . On applique le lemme précédent à la fonction  $f - \varepsilon$  (toujours avec  $\mathcal{H} = \{f_n\}_{n \geq 0}$ ) : il existe  $N$  tel que pour tout  $x \in X$  on ait :

$$f_N(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Finalement, pour tout indice  $n \geq N$  et pour tout  $x \in X$ , on a :

$$f(x) - \varepsilon < f_N(x) \leq f_n(x) \leq f(x),$$

soit  $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . □



Le théorème de Dini a pour conséquence ce premier énoncé, d'apparence anecdotique, mais utile pour prouver le théorème de Weierstrass historique (approximation uniforme des fonctions continues sur un segment compact par des fonctions polynomiales).

## Lemme

On définit une suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  de fonctions  $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$  par  $p_1(x) = 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$  et

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x))^2.$$

Alors les fonctions  $p_n$  sont polynomiales et convergent uniformément vers  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $[0; 1]$ .

**Remarque :** en remplaçant  $p_n(x)$  par  $p_n(x^2)$ , on voit que la fonction valeur absolue  $x \mapsto |x|$  est limite uniforme de fonctions polynomiales sur  $[0; 1]$ .



On va utiliser le théorème de Dini pour prouver le lemme précédent.

**Preuve.** Pour tout  $n \geq 1$ , un calcul montre que :

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - p_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right),$$

ce qui permet de voir par récurrence que

$$p_n(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \quad \text{pour tout } x \in [0; 1].$$

À  $x$  fixé la suite numérique  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  est croissante et majorée. Elle converge donc vers  $g(x)$  qui satisfait  $g(x) = g(x) + \frac{1}{2}(x - g(x)^2)$ , autrement dit vers  $g(x) = \sqrt{x}$ . Ainsi on vient de voir que  $\sqrt{\cdot}$  est limite simple des  $p_n$  sur  $[0; 1]$ , et le théorème de Dini assure que la convergence est uniforme. □



## Théorème (théorème de Weierstrass classique)

*Soient  $a < b$  des nombres réels. Alors toute fonction réelle continue sur  $[a; b]$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

**Preuve.** Les étapes d'une preuve possible sont les suivantes.

1. Par le lemme précédent, la fonction valeur absolue  $|\cdot|$  est limite uniforme de fonctions polynomiales sur  $[a; b]$ .
2. Par décalage de la variable et homothétie, toute combinaison linéaire de fonctions  $x \mapsto |x - c|$  ( $c \in [a; b]$ ) est limite uniforme de fonctions polynomiales sur  $[a; b]$ .
3. Les combinaisons linéaires précédentes reconstituent les fonctions continues affines par morceaux sur  $[a; b]$ .
4. Toute fonction continue sur  $[a; b]$  est uniformément continue (par Heine) et est donc limite uniforme de fonctions continues affines par morceaux.

On conclut en utilisant la « transitivité » de l'approximation uniforme (c'est la nouvelle idée intéressante dans cette preuve).



Nous allons maintenant mentionner sans démonstration des généralisations du théorème de Weierstrass classique. Ces résultats sont dus à M. Stone, qui a dégagé le rôle de la relation d'ordre  $\leq$  sur  $\mathbf{R}$  quand on travaille sur  $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$  et le rôle de la stabilité par conjugaison complexe quand on travaille sur  $\mathcal{C}(X; \mathbf{C})$ .

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. On munit  $\mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  de la distance associée à la norme de la convergence uniforme :  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

## Définition

Un sous-ensemble  $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  est **séparant** si, pour tous  $x \neq y \in X$ , il existe  $f \in \mathcal{H}$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ .

La propriété d'être séparant est une façon pour  $\mathcal{H}$  d'être « assez gros » vis-à-vis des points du compact  $X$ .



On dit que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{K})$  est une sous-algèbre si  $\mathcal{H}$  est stable par combinaison linéaire et par produit (point par point) des fonctions.

Dans le résultat suivant, on suppose que  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ .

## Théorème (théorème de Stone-Weierstrass réel)

*On suppose que  $(X, d)$  est un espace métrique compact. Soit  $\mathcal{H}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$  qui contient les fonctions constantes et qui est séparante. Alors  $\mathcal{H}$  est dense dans  $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$  pour la topologie associée à la norme de la convergence uniforme.*

Autrement dit, ce théorème fournit une condition suffisante (stabilité par opérations algébriques et propriété de séparation) pour être dense dans  $(\mathcal{C}(X; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .



## Exemples.

1. On retrouve facilement le théorème de Weierstrass classique (la fonction identité suffit à séparer les points).
2. L'ensemble des polynômes trigonométriques à coefficients dans  $\mathbf{R}$  est dense dans  $(\mathcal{C}(\mathbf{S}^1; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ .
3. Toute fonction numérique continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  est limite uniforme sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  de sommes finies de fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ , où  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[0, 1]$ .
4. Le sous-espace de  $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$  des *fonctions lipschitziennes* sur  $[0, 1]$  i.e. l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$  pour lesquelles, il existe une constante  $k > 0$  telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|,$$

est dense dans  $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$ , muni de la norme de la convergence uniforme.

# Critère de densité dans $\mathcal{C}(X; \mathbf{C})$

Pour formuler le critère de densité pour les fonctions à valeurs complexes, on a besoin d'une autre notion de stabilité adaptée à la situation.

## Définition

On dit que  $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X; \mathbf{C})$  est **auto-conjugué** si  $\mathcal{H}$  est stable par conjugaison complexe, i.e. si dès que  $f \in \mathcal{H}$ , on a  $\bar{f} \in \mathcal{H}$ .

## Théorème (théorème de Stone-Weierstrass complexe)

On suppose que  $X$  est compact. Soit  $\mathcal{H}$  une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X; \mathbf{C})$  qui contient les fonctions constantes, est séparante et auto-conjuguée. Alors,  $\mathcal{H}$  est dense dans  $\mathcal{C}(X; \mathbf{C})$ .

Autrement dit, ce théorème fournit une condition suffisante (stabilité par opérations algébriques, par conjugaison complexe et propriété de séparation) pour être dense dans  $(\mathcal{C}(X; \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$ .

# Exemples de (non) densité dans $\mathcal{C}(X; \mathbf{C})$



**Exemple :** Le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel engendré par les  $x \mapsto e^{inx}$ , pour  $n \in \mathbf{Z}$ , est dense dans l'espace des fonctions continues  $2\pi$  périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme.

**Non-exemple :** La fonction  $x \mapsto e^{-ix}$  n'est pas limite uniforme de combinaisons linéaires (finies) de fonctions de la forme  $x \mapsto e^{inx}$ , où  $n \in \mathbf{N}$ . En effet, pour tout  $P \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$ ,

$$\int_0^{2\pi} e^{ix} P(e^{ix}) dx = 0.$$

Si  $(P_n)_{n \geq 0}$  est une suite de  $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$  telle que  $x \mapsto P_n(e^{ix})$  converge uniformément vers  $x \mapsto e^{-ix}$  alors

$$2\pi = \int_0^{2\pi} e^{ix} e^{-ix} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{ix} P_n(e^{ix}) dx = 0. \quad \square$$

# Stone-Weierstrass : réduction du cas complexe au cas réel



**Preuve.** On note

$$\mathcal{H}_{\mathbf{R}} := \{f \in \mathcal{H} : \forall x \in X, f(x) \in \mathbf{R}\},$$

Soient  $x \neq y$ . Il existe  $f \in \mathcal{H}$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ . Quitte à échanger  $x$  et  $y$  on peut supposer que  $f(x) \neq 0$ . Définissons  $g \in \mathcal{H}$  par

$$g(z) = \frac{f(z) - f(y)}{f(x) - f(y)}.$$

pour  $z \in X$ , puis,

$$h = \frac{1}{2}(g + \bar{g}) \in \mathcal{H}_{\mathbf{R}}$$

On vérifie que  $h(x) = 1 \neq h(y) = 0$ . Ainsi  $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$  est une sous-algèbre séparante de  $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$  qui contient les fonctions constantes. Donc  $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$  est dense dans  $\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ .

De même

$$\mathcal{H}_i := \{f \in \mathcal{H} : \forall x \in X, f(x) \in i\mathbf{R}\},$$

est dense dans  $i\mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ . Finalement,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbf{R}} \oplus \mathcal{H}_i$  est dense dans  $\mathcal{C}(X; \mathbf{C})$ .





# 3. Points fixes et applications



Soit  $T$  une application d'un espace métrique  $(X, d)$  dans un espace métrique  $(X', d')$ .

## Définition

On dit que  $T$  est **contractante** s'il existe  $k \in [0, 1[$  tel que pour tous  $x, y \in X$ , on ait :

$$d'(T(x), T(y)) \leq k d(x, y),$$

autrement dit, si  $T$  est  $k$ -lipschitzienne de rapport  $k \in [0, 1[$ .

**Remarque** : une application contractante est automatiquement continue.

# Énoncé du théorème de point fixe de Banach



Voici un énoncé très général, qui se décline dans de nombreuses situations et qui conduit à des résultats très profonds (par exemple pour la résolution des équations différentielles).

## Théorème (théorème de point fixe de Banach)

*Soit  $(X, d)$  un espace métrique non vide, complet et soit  $T : X \rightarrow X$  une application contractante. Alors,  $T$  possède un unique point fixe dans  $X$  (i.e. il existe un unique  $x \in X$  tel que  $T(x) = x$ ).*

Il est instructif de discuter les hypothèses, en lien avec quelques idées directrices de la preuve.

1. D'abord, il est naturel de supposer  $X$  non vide, surtout si le but est d'obtenir un point (fixe) dedans...
2. La complétude de  $X$  est utilisée car on va prouver que toute suite dans  $X$  obtenue en itérant  $T$  sur un point quelconque, est de Cauchy.
3. La limite d'une telle suite est un point fixe (et l'unicité est facile).



**Preuve.** Soit  $x_0 \in X$ . Définissons  $(x_n)_{n \geq 0}$  par  $x_{n+1} = T(x_n)$  pour tout  $n \geq 0$ .  
Pour tous  $n \geq m$ , on peut estimer

$$d(x_n, x_m) = d(T^m(x_{n-m}), T^m(x_0)) \leq k^m d(x_{n-m}, x_0).$$

En particulier, l'inégalité triangulaire implique que

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} k^j d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Donc, pour tous  $n \geq m$ , on a :

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0).$$



La suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy dans  $X$  qui est complet, donc elle converge. On note  $x_\infty \in X$  sa limite. Par continuité de  $T$ , on a

$$T(x_\infty) = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

Donc,  $x_\infty$  est un point fixe de  $T$ .

Si  $x, y$  sont des points fixes de  $T$ , on a

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y),$$

et, puisque  $k \in [0, 1[$ , on a nécessairement  $d(x, y) = 0$ , i.e.  $x = y$ . □

# Un problème d'équations différentielles

On part d'un ouvert non vide  $\Omega$  dans un evn de dimension finie  $E$  et d'un intervalle ouvert non vide  $I$  de la droite réelle  $\mathbf{R}$ . Étant donnée une application continue  $X : I \times \Omega \rightarrow E$ , on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x(t))$$

avec condition initiale  $x(t_0) = u_0$  pour  $t_0 \in I$  et  $u_0 \in \Omega$ .

L'équation ci-dessus est souvent appelée *résolue* dans le sens où la dérivée de la fonction inconnue est isolée comme membre (de gauche) de l'équation. Une généralisation du problème ci-dessus consiste à considérer des équations *implicites*, c'est-à-dire des équations de la forme  $g(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)) = 0$ . Ces équations peuvent souvent être rendues localement résolues.

Une autre généralisation consiste à considérer des dérivées d'ordre supérieur de la fonction inconnue. Une astuce de calcul permet de ramener une équation résolue d'ordre  $n$  à l'ordre 1, quitte à remplacer  $E$  par  $E^n$  et  $x$  par  $(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$ .



## Théorème (théorème de Cauchy-Lipschitz)

Supposons  $X$  continue en  $(t, x)$  et lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout  $(\tau_0, u_0) \in I \times \Omega$ , il existe  $\delta > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tous  $u \in B(u_0, \delta)$  et  $t_0 \in ]\tau_0 - \delta; \tau_0 + \delta[$  le système

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x(t)),$$

avec condition initiale  $x(t_0) = u$ , possède une unique solution définie sur  $t \in ]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[$ .

## Remarques.

- Noter que dans cet énoncé le temps d'existence  $2\alpha$  de la solution ne dépend ni de  $t_0$ , ni de  $u$  (choisis cependant dans des domaines prescrits, notamment par  $\delta$ ).
- On peut se contenter de supposer que  $X$  est localement lipschitzienne, par exemple de classe  $C^1$ .



Soit  $J$  la réunion des intervalles contenant  $t_0$  sur lesquels on dispose d'une solution au problème du théorème.

## Proposition

*Il existe une solution  $x$  définie sur  $J$ , et toute autre solution s'obtient par restriction de celle-ci.*

La solution définie sur  $J$  s'appelle la *solution maximale* du problème du théorème.

**Preuve.** Il suffit de prouver que deux solutions, disons  $x_1$  et  $x_2$ , définies sur des intervalles contenant  $t_0$ , disons  $J_1$  et  $J_2$ , coïncident sur  $J_1 \cap J_2$ . Autrement dit de prouver que  $K = \{t \in J_1 \cap J_2 : x_1(t) = x_2(t)\}$  vaut  $J_1 \cap J_2$  tout entier. Par continuité,  $K$  est un fermé de  $J_1 \cap J_2$ , et il est non vide car  $t_0 \in K$ . Enfin, le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que  $K$  est ouvert. Or, l'intersection  $J_1 \cap J_2$  est un intervalle contenant  $t_0$ , donc est connexe. Ceci implique qu'on a bien  $K = J_1 \cap J_2$ . □

# Théorème de Cauchy-Lipschitz, preuve

**Esquisse de preuve.** C'est un retour à la topologie des evn et aux points fixes...

En effet, par intégration l'équation du théorème est équivalente à

$$x(t) = u + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds.$$

Pour  $\alpha > 0$  et  $r > 0$ , les espaces de fonctions continues  $]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[ \rightarrow \overline{B(u_0, r)}$  sont des espaces de Banach pour la norme  $\| \cdot \|_\infty$  de la convergence uniforme. Pour résoudre l'équation du théorème, on se ramène à trouver un point fixe  $x$  pour la transformation

$$T_u : x \mapsto (T_u(x) : t \mapsto u + \int_{t_0}^t X(s, x(s)) ds).$$

Cela se fait en utilisant le théorème de point fixe de Banach. Il faut pour cela choisir les paramètres  $\alpha$ ,  $\delta$  et  $r$  assez petits pour que  $T_u$  envoie  $\mathcal{C}([t_0 - \alpha; t_0 + \alpha], \overline{B(u_0, r)})$  dans lui-même, en y étant contractante pour la norme  $\| \cdot \|_\infty$ .



**Non unicité.** On n'a pas unicité de la solution quand  $X$  est seulement continue. Ceci peut se voir grâce à l'équation implicite  $(\frac{dx}{dt})^2 - 4x(t) = 0$ , qui donne lieu à l'équation résolue

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{|x(t)|}.$$

Cette dernière équation admet deux solutions telles que  $x(0) = 0$ , à savoir la fonction nulle et la fonction  $t \mapsto \text{signe}(t)t^2$ . Un théorème d'existence est par contre disponible (théorème de Peano).

**Temps d'existence.** Revenons à l'application  $T_u$  de  $\mathcal{C}([t_0 - \alpha; t_0 + \alpha], \overline{B(u_0, r)})$  dans lui-même utilisée dans la preuve. Alors une amélioration astucieuse du théorème de point fixe (par unicité, il suffit qu'une puissance  $T^n$  de  $T$  contracte) et des calculs supplémentaires sur  $T_u$ , permettent de voir que le temps d'existence des solutions ne dépend que de  $r$  et de  $M = \sup \|X(t, x)\|$  pour  $|t - t_0| \leq \alpha$  et  $x \in \overline{B(u_0, r)}$ .