ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Compacité, complétude, connexité

1. Compacité

La compacité est une notion omniprésente dans tous les domaines des mathématiques.

Définition

Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) *De tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement* **fini**.

(ii) *Toute famille de fermés de X d'intersection vide admet une sous-famille* **finie** *d'intersection vide.*

Si (X, d) possède les propriétés ci-dessus, on dit qu'il est compact.

Justification. L'équivalence entre (i) et (ii) se fait par passage aux complémentaires :

$$\text{une réunion d'ouverts} \quad \bigcup_{i \in I} O_i = X \quad \text{devient une intersection de fermés} \quad \bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing,$$

où $F_i = X - O_i$, et vice versa. $\square$

Motivation et exemples pour les espaces compacts

Motivation. Le grand intérêt de la compacité s'explique en partie parce que cette notion fournit des énoncés d'existence : la formulation (ii) ci-dessus est un énoncé d'existence très général qui se décline dans de multiples situations. Pour ce faire, il peut être utile de se ramener, dans (i) ou (ii), à des familles de parties ouvertes ou fermées avec de bonnes propriétés vis-à-vis de l'inclusion (croissance ou décroissance).

La compacité assure aussi l'existence de limites pour des (sous-)suites bien choisies (critère de Bolzano-Weierstrass).

Exemples. On va voir que toutes les parties fermées et bornées des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) sont des espaces compacts (pour la topologie induite par n'importe quelle norme).

En revanche, la question de la compacité de parties fermées et bornées dans $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension infinie (par exemple des boules ou des sphères dans des espaces de fonctions) est plus délicate.

Non-exemple : l'espace métrique $(]0,1[, |\cdot|)$ n'est pas compact.

Justification. Remarquer que l'on a une réunion *croissante* (et donc qu'une réunion partielle finie est un intervalle de la suite) :

$$]0,1[= \bigcup_{n \geqslant 3}]\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}[.$$

et que, pour tout $n \geqslant 3$, l'intervalle $]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ est un ouvert *strict* de $(]0,1[, |\cdot|)$. $\square$

Justification alternative. Remarquer que l'on a une intersection *décroissante* (et donc qu'une intersection partielle finie est un intervalle de la suite) :

$$\bigcap_{n \geqslant 2}]0, \tfrac{1}{n}] = \varnothing.$$

et que, pour tout $n \geqslant 2$, l'intervalle $]0, \frac{1}{n}]$ est un fermé *non vide* de $(]0,1[, |\cdot|)$. $\square$

Caractérisation séquentielle des compacts

On dispose déjà de critères séquentiels pour vérifier la fermeture d'une partie et la continuité d'une application ; en voici un (célèbre) pour la compacité.

Théorème (théorème de Bolzano-Weierstrass)

Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si, et seulement si, de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite qui converge.

Référence. On renvoie au polycopié de cours pour la preuve : théorème 3.1 p. 36. □

Exemple : $(]0,1[, |\cdot|)$ n'est pas compact.

Justification (encore une). La suite $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 2}$ n'admet aucune sous-suite convergente dans $(]0,1[, |\cdot|)$. □

Sous-espaces compacts d'un espace métrique quelconque

C'est le moment de réviser la topologie induite du cours précédent...

Situation. On part d'un espace métrique (X, d) et on se donne une partie Y de X. L'ensemble Y est un espace métrique pour la distance d_Y, restriction de d à $Y \times Y$ (et que parfois on notera encore d). La question de la compacité de Y pour la topologie induite par d est naturelle. Elle se pose en termes d'ouverts de Y pour la topologie induite, mais on peut se ramener aux ouverts de l'espace ambiant X :

Lemme

Soit Y un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d). Alors (Y, d_Y) est un espace compact si, et seulement si, de tout recouvrement de Y par des ouverts de X on peut extraire un sous-recouvrement fini de Y.

Preuve. Découle du fait que les ouverts de (Y, d_Y) sont les traces des ouverts de (X, d). $\square$

Terminologie. Si Y est un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d), on dira que Y est un *compact* de X si (Y, d_Y) est un espace métrique compact pour la topologie induite.

Les parties compactes sont fermées

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un compact de X, autrement dit une partie telle que (Y, d_Y) soit un espace métrique compact. Alors Y est fermé dans X.

Preuve. Fixons $x \in X - Y$. Pour tout $y \in Y$, choisissons (grâce à la distance d) deux ouverts disjoints $U_{x,y}$ et $U_{y,x}$ contenant respectivement x et y. On extrait du recouvrement de Y par les $U_{y,x}$, pour $y \in Y$, un sous-recouvrement fini :

$$Y \subset V := \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i,x}.$$

Par construction, l'intersection finie $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$ est un ouvert qui contient x et ne rencontre pas V. *A fortiori* U ne rencontre pas Y. Comme x était arbitraire dans $X - Y$, on voit donc que $X - Y$ est ouvert dans X. □

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. Une intersection décroissante *de compacts non vides de X est non vide.*

Preuve. Soit $(K_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de compacts, qu'on suppose décroissante (i.e. $K_{n+1} \subset K_n$) et d'intersection vide. Chaque K_n est fermé dans K_0 et l'intersection des K_n est, par hypothèse, vide. Par compacité, il existe donc une intersection partielle, *finie*, vide. Par décroissance de la suite de compacts, cela revient à dire qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ (par exemple le plus grand indice intervenant dans l'intersection partielle finie) tel que

$$\bigcap_{n=0}^{N} K_n = \varnothing.$$

En particulier $K_N = \varnothing$. Cela prouve la proposition par contraposition. $\square$

Parties fermées dans les espaces compacts

Proposition

Soit (X, d) un espace métrique. Si X est compact et $Y \subset X$ est fermé, alors Y est compact pour la topologie induite.

Preuve. On se doute que le critère le plus adapté à la situation est celui impliquant les fermés... Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de (Y, d) d'intersection vide. L'ensemble Y étant fermé, les F_i sont aussi des fermés de X. Par compacité de X, on peut donc extraire de la famille $(F_i)_{i \in I}$ une sous-famille finie d'intersection vide. $\square$

Remarque. On va bientôt voir que le segment $[0; 1]$ est un espace compact pour la distance de la valeur absolue : cela peut se voir par un argument de dichotomie, combiné au critère séquentiel de Bolzano-Weierstrass.

Proposition

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Preuve. Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques, soit $f : X \to Y$ une application continue et soit $Z \subset X$ un compact. On va utiliser ici le lemme précédent (sur la topologie induite), en se donnant $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $f(Z)$ par des ouverts de Y. Alors $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ est un recouvrement de Z par des ouverts de X :

$$Z \subset f^{-1}(f(Z)) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i).$$

Par compacité de Y, on peut en extraire un sous-recouvrement $Z \subset \bigcup_{j \in J} f^{-1}(V_j)$ avec $J \subset I$ fini. Finalement, on obtient bien un sous-recouvrement fini de $f(Z)$:

$$f(Z) \subset \bigcup_{j \in J} V_j.$$

□

Produit d'espaces métriques compacts

Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, on peut munir l'espace produit $X \times X'$ de la *distance somme* :

$$d_s\big((x_1, x_1'), (x_2, x_2')\big) := d(x_1, x_2) + d'(x_1', x_2'),$$

ou bien de la *distance produit* (Lipschitz-équivalente à la précédente) :

$$d_p\big((x_1, x_1'), (x_2, x_2')\big) := \max(d(x_1, x_2), d'(x_1', x_2')).$$

Corollaire

Le produit $X \times Y$ de deux espaces métriques compacts (X, d) et (Y, d') (muni de la distance produit ou de la distance somme) est un espace métrique compact.

Preuve. Soit $((x_n, y_n))_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $X \times Y$. La compacité de (X, d) permet d'extraire de la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$, une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ qui converge vers x. La compacité de (Y, d') permet d'extraire de la suite $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$, une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n \geqslant 0}$ qui converge vers y. En particulier, (x, y) est une valeur d'adhérence de la suite $((x_n, y_n))_{n \geqslant 0}$. $\square$

Compacité de $[0,1]$

Lemme

On suppose $\mathbf{R}$ *muni de la topologie usuelle, i.e. issue de la valeur absolue usuelle. Alors l'intervalle* $[0,1]$ *est un compact de* $\mathbf{R}$.

Preuve. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts qui recouvrent $[0,1]$. On note :

$$W := \{s \in [0,1] \,:\, [0,s] \text{ admet un recouvrement fini par des } U_i\}\,.$$

On a $W \neq \varnothing$ car $0 \in W$. De plus, par construction W est un sous-intervalle de $[0,1]$: donc $W = [0,c[$ ou $W = [0,c]$ pour $c = \sup W$.

Si $c < 1$, on remarque qu'il existe $j \in I$ tel que $c \in U_j$. L'ensemble U_j étant ouvert, on peut trouver $s < c < s'$ tels que $s, s' \in U_j$. En particulier $[0,s'] \subset W$ car on peut ajouter U_j au recouvrement fini de $[0;s]$: ceci contredit le fait que c est la borne supérieure de W. Ainsi $c = 1$ et on montre de même que $c \in W$. $\square$

Proposition

On munit $\mathbf{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors un sous-ensemble de $\mathbf{R}^N$ est compact si, et seulement si, il est fermé et borné.

Preuve. Déjà, un compact X est un fermé. En outre X est nécessairement borné : autrement, on pourrait construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de X telle que $\|x_n\| \geqslant n$ (une telle suite ne peut pas admettre de sous-suite convergente dans $\mathbf{R}^N$).

Inversement, commençons par remarquer que pour tout $a > 0$ l'intervalle $[-a, a]$ est compact, comme image de $[0, 1]$ par une fonction affine. De plus, le pavé $[-a, a]^N$ est un compact comme produit d'espaces compacts.

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, un ensemble X est borné s'il est inclus dans un pavé $[-a, a]^N$, qui est compact. Si de plus X est fermé, c'est un fermé dans un compact, donc il est compact. $\square$

Théorème

Une fonction continue à valeurs réelles, définie sur un espace métrique compact, est bornée et atteint ses bornes.

Preuve. L'image d'un compact X par une application continue est un compact, donc un fermé borné de $\mathbf{R}$. En particulier $\inf_X f$ et $\sup_X f$ appartiennent à l'image de X par f. $\square$

Remarque. On a vu qu'un espace métrique contient naturellement des fonctions continues, à savoir les fonctions partielles $d(x, \cdot)$ « distance à un point » : ce sont en effet des fonctions 1-lipschitziennes. Une variante de cette remarque permet de construire des ouverts disjoints contenant des fermés disjoints donnés au départ.

Un exemple similaire est fourni dans ce qui suit par les normes sur les espaces vectoriels.

Équivalence des normes en dimension finie

Théorème

Toutes les normes sur $\mathbf{R}^N$ sont équivalentes. Plus généralement, sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve. Soit $\mathcal{N}$ une norme quelconque sur $\mathbf{R}^N$. Pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &\leqslant \sum_{i=1}^N |x_i| \mathcal{N}(e_i) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(e_i) \right) \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{N} : (\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est continue car

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leqslant \mathcal{N}(x-y) \leqslant \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(e_i) \right) \|x-y\|_\infty.$$

Équivalence des normes en dimension finie, preuve

On note $S := \{x \in \mathbf{R}^N \ : \ \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. Au titre d'image réciproque d'un fermé par une fonction continue, S est fermé. Par définition, c'est une partie bornée dans $\mathbf{R}^N$, donc c'est un compact.

Par le théorème qui précède, $\mathcal{N}$ atteint ses bornes sur S et en particulier est minorée par $\mathcal{N}(x_0) > 0$ pour un certain $x_0 \in S$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^N - \{0\}$, on peut écrire $x = \|x\|_\infty \dfrac{x}{\|x\|_\infty}$, l'intérêt étant que $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$. On obtient alors :

$$\mathcal{N}(x) \geqslant \mathcal{N}(x_0)\,\|x\|_\infty,$$

par homogénéité de la norme.

Finalement, on a : $\mathcal{N}(x_0)\,\|x\|_\infty \leqslant \mathcal{N}(x) \leqslant \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(e_i)\right)\,\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. Ceci prouve que $\mathcal{N}$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, et finalement que toutes les normes sur $\mathbf{R}^N$ sont équivalentes.

$\square$

Théorème de Borel-Lebesgue

Par définition, les parties bornées dans $\mathbf{K}^N$ sont les mêmes pour deux normes équivalentes. En outre, on a déjà vu que deux normes équivalentes donnent lieu à la même topologie. Par conséquent, l'équivalence de toutes les normes sur $\mathbf{K}^N$ implique que le fait d'être fermé (ou compact) ne dépend pas non plus de la norme choisie.

Corollaire (théorème de Borel-Lebesgue)

Sur $\mathbf{R}^N$ ou plus généralement sur $\mathbf{K}^N$ (indépendamment de la norme), les sous-ensembles compacts sont les fermés bornés.

Preuve. Cela découle de ce qui précède et du fait que cela est connu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Remarque. Ce résultat est faux en dimension infinie : la boule unité fermée de $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte. Pour tout $n \geqslant 0$, définir $\mathbf{x}^n := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, avec 1 seule valeur non nulle, pour l'indice n exactement. On a alors :

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_\infty = 1 \quad \text{si} \quad n \neq m \quad : \text{pas de sous-suite convergente.}$$

Continuité automatique d'applications linéaires

Proposition

Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie et F est un espace vectoriel normé, alors $L(E,F)$, l'espace des applications linéaires de E dans F coïncide avec $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Preuve. Soit $(e_1, \dots, e_N)$ est une base de E, on note $\left\| \sum_{i=1}^N x_i\, e_i \right\|_E := \sup_{i=1,\dots,N} |x_i|$. La linéarité de L et l'inégalité triangulaire impliquent que, pour tout $x = \sum_{i=1}^N x_i\, e_i$, on a :

$$\begin{aligned} \|L(x)\|_F &\leqslant \sum_{i=1}^N |x_i|\, \|L(e_i)\|_F \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^N \|L(e_i)\|_F \right) \|x\|_E, \end{aligned}$$

d'où la continuité de L (avec majoration explicite de la constante de Lipschitz). $\square$

Proposition (théorème de Heine)

Soit f une application continue d'un espace métrique compact *(X, d) dans un espace métrique (X', d'), alors f est est uniformément continue.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n > 0$, on note

$$K_n := \left\{ (x, x') \in X \times X \ : \ d(x, x') \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d'(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon \right\}.$$

Pour chaque $n \geqslant 1$, la partie K_n est compacte (fermé dans $X \times X$ qui est compact), on a $K_{n+1} \subset K_n$ et

$$\bigcap_{n>0} K_n = \varnothing.$$

Donc, il existe $n_0 > 0$ tel que $K_{n_0} = \varnothing$. $\square$

2. Complétude

Notion de suite de Cauchy

L'intérêt des suites de Cauchy est que dans des espaces métriques convenables (les espaces *complets* – voir plus loin), on peut vérifier la convergence de certaines suites sans avoir à connaître *a priori* la limite. On cherchera donc à exhiber le plus possible d'espaces complets.

Définition

Une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ *d'un espace métrique* (X, d) *est appelée* suite de Cauchy *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \qquad \textit{tel que} \qquad (\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

Remarques.

1. Si d_1 et d_2 sont deux distances Lispchitz-équivalentes sur X, on vérifie qu'une suite dans X est de Cauchy pour la distance d_1 si, et seulement si, elle est de Cauchy pour la distance d_2.
2. On vérifie aussi que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue, est de Cauchy.

Les suites convergentes sont de Cauchy

Proposition

Une suite qui converge est une suite de Cauchy.

Preuve. Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite qui converge vers x dans un espace métrique (X, d).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

Alors par inégalité triangulaire

$$\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. $\square$

Les suites de Cauchy sont bornées

Proposition

Une suite de Cauchy est bornée.

Preuve. Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy.

Choisissons $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) < 1.$$

En particulier

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_{n_0}) < 1,$$

ce qui montre que la suite est bornée. $\square$

Suites de Cauchy possédant une valeur d'adhérence

Proposition

Une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui possède une valeur d'adhérence, converge.

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers x. Donc, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon/2.$$

Alors,

$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1), \quad d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite converge. □

Notion d'espace métrique complet

Définition

Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

Exemples.

- Un espace métrique compact est complet (proposition précédente et Bolzano-Weierstrass).
- $(]0,1], |\cdot|)$ n'est pas un espace métrique complet : penser à $(\frac{1}{n})_{n \geqslant 1}$.
- $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ n'est pas un espace métrique complet. On peut définir $\mathbf{R}$ comme étant le « complété » de $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$.

Remarques.

1. La complétude est une propriété qui dépend de la distance et pas seulement de la topologie sur l'ensemble X.
2. Si d_1 et d_2 sont des distances Lipschitz-équivalentes sur un ensemble X, on vérifie que (X, d_1) est complet si, et seulement si, (X, d_2) l'est.

Non-exemple d'espace métrique complet

Non-exemple : prenons sur $\mathbf{R}$ la distance

$$d(x, y) := |e^{-x} - e^{-y}|.$$

Alors l'espace $(\mathbf{R}, d)$ n'est pas un espace métrique complet.

Justification. La suite $(n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{R}, d)$, pourtant elle ne converge pas dans $\mathbf{R}$ pour cette distance. $\square$

NB : la topologie associée à la distance d est égale à la topologie associée à la distance usuelle.

Lemme

Soit (X, d) un espace métrique complet et $Y \subset X$. Alors l'espace $(Y, d_Y) = (Y, d)$ est complet si, et seulement si, Y est fermé.

Preuve. Supposons que (Y, d) est complet. Si $(y_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'éléments de Y qui converge dans (X, d), alors c'est une suite de Cauchy dans (Y, d). Elle converge donc dans Y et par conséquent Y est fermé. Soit $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans (Y, d). C'est une suite de Cauchy dans (X, d) donc elle converge dans (X, d). Si Y est fermé, elle converge également dans (Y, d). Donc (Y, d) est complet. $\square$

Produit d'espaces métriques complets

Lemme

Le produit de deux espaces métriques complets $(X_i, d_i), i = 1, 2$ muni de la distance somme ou de la distance produit est un espace métrique complet.

Preuve. Si $((x_{1,n}, x_{2,n}))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(X_1 \times X_2, d_p)$, alors les suites $(x_{i,n})_{n\geqslant 0}$ sont des suites de Cauchy dans (X_i, d_i).

Elles convergent donc vers une limite notée x_i et on vérifie que la suite $((x_{1,n}, x_{2,n}))_{n\geqslant 0}$ converge vers (x_1, x_2), aussi bien pour la distance somme que pour la distance produit. $\square$

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Comme pour la compacité, les espaces vectoriels normés de dimension finie ont un bon comportement ; la nuance est que cette fois, c'est l'espace tout entier, et donc tout fermé qu'il contient, qui jouit de la propriété de complétude.

Théorème

Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, muni de la distance associée à la norme, est un espace métrique complet.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy. Cette suite est bornée, elle est donc incluse dans un compact (prendre par exemple une boule fermée de rayon assez grand).

On peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite qui converge. En particulier, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une valeur d'adhérence, donc elle converge. $\square$

Notion d’espace de Banach

Définition

On dit qu’un espace vectoriel normé est un espace de Banach *s’il est un espace métrique complet pour la distance issue de la norme.*

La structure d’un espace de Banach est donc très riche puisqu’elle cumule de forte propriétés algébriques et métriques, compatibles entre elles.

Exemples.

- Une reformulation du théorème précédent consiste à dire que tous les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie sont des espaces de Banach.
- L’étape suivante consiste à exhiber des espaces de Banach qui sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension infinie.

Exemple : L'espace $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve. Soit $(\mathbf{x}^m)_{m\geqslant 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(\ell^\infty(\mathbf{N},;\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$. On note

$$\mathbf{x}^m := (x_n^m)_{n\in\mathbf{N}},$$

où $x_n^m \in \mathbf{K}$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, m' \geqslant m_0$,

$$\sup_{n\geqslant 0} |x_n^m - x_n^{m'}| < \varepsilon.$$

Donc, pour chaque $n \geqslant 0$, la suite $(x_n^m)_{m\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{K}, |\cdot|)$, qui est un espace métrique complet. Cette suite converge vers une limite que l'on note $z_n \in \mathbf{K}$.

L'espace de Banach $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$, fin

On note $\mathbf{z} := (z_n)_{n\geqslant 0}$. Vérifions que $\mathbf{z} \in \ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K})$ et que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbf{x}^m = \mathbf{z}.$$

On sait que

$$\sup_{n\geqslant 0} |x_n^m - x_n^{m'}| < \varepsilon.$$

pour $m, m' \geqslant m_0$.

Donc

$$|x_n^m - z_n| \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $m \geqslant m_0$.

Finalement, la suite $\mathbf{z}$ est bornée (prendre par exemple $\varepsilon = 1$) et la suite $(\mathbf{x}^m)_{m\geqslant 0}$ converge vers $\mathbf{z}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

L'espace $(\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet

Exemple : L'espace $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt,$$

n'est pas un espace vectoriel normé complet.

Preuve. Définissons pour tout $n \geqslant 2$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ 1 - n\,(x - 1/2) & \text{si} \quad x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{n,m \to \infty} \|f_n - f_m\|_1 = 0,$$

mais $(f_n)_{n \geqslant 2}$ ne converge pas vers une fonction continue. $\square$

Applications linéaires continues dans un Banach

Une autre façon de construire des espaces de Banach consiste à considérer des espaces d'applications linéaires *continues* à valeurs dans un espace de Banach.

Proposition

Supposons que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Alors, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est également un espace de Banach.

Preuve. Soit $(L_m)_{m\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, n \geqslant n_0$,

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \varepsilon \, \|x\|_E.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \| \ \|_F)$, qui est un espace de Banach, donc elle converge vers une limite que l'on note $L(x) \in F$.

On vérifie que L est linéaire

$$L(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} L_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_{n\to\infty} L_n(x) + \mu \lim_{n\to\infty} L_n(y) = \lambda L(x) + \mu L(y).$$

On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \varepsilon \|x\|_E.$$

pour $m, n \geqslant n_0$.

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L(x)\|_F < \varepsilon \|x\|_E.$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

Applications linéaires continues dans un Banach, fin

En particulier,

$$\|L(x)\|_F \leqslant \left(\varepsilon + \|L_{n_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right) \|x\|_E.$$

ce qui montre que L est continue et

$$\|L_n - L\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon,$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

Finalement, la suite $(L_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers L dans $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$. $\square$

l'X
ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

3. Connexité

Définition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est connexe s'il n'existe pas de sous-ensemble de X autre que $\varnothing$ et X qui soit à la fois ouvert et fermé.

Typiquement, un *raisonnement de connexité* se met en place comme suit. Supposons qu'on ait à vérifier une certaine propriété, disons (P), pour tous les points d'un espace métrique connexe. Alors, on montre que l'ensemble des points de X qui satisfont (P) est : non vide, ouvert et fermé.

Exemple. On peut prouver ainsi que dans tout ouvert connexe non vide de $\mathbf{R}^N$, deux points sont toujours reliés par une ligne polygonale par morceaux.

Notons déjà que :

Un espace métrique (X, d) est connexe si, et seulement si,
il n'existe pas de fonction continue non constante sur X à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Cela provient de ce que les images réciproques $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont ouvertes et fermées.

Proposition

L'image d'un espace métrique connexe par une application continue est connexe.

Preuve. Soient (X, d) et (Y, d') des espaces métriques avec X connexe, soit $f : X \to Y$ une application continue. Supposons qu'il existe deux ouverts U et V de Y tels que $U \cap V \cap f(X) = \varnothing$ et $f(X) \subset U \cup V$. Par continuité $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont ouverts ; en outre, ils satisfont $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(U \cap V) = \varnothing$. Ceci implique que $f^{-1}(U) = \varnothing$ soit $U \cap f(X) = \varnothing$, ou $f^{-1}(V) = \varnothing$ soit $V \cap f(X) = \varnothing$. $\square$

Exemples d'espaces connexes

On a déjà vu et prouvé, dans le cours précédent, que $\mathbf{R}$ est connexe. En fait :

Proposition

Les parties connexes de $\mathbf{R}$ *sont les intervalles de* $\mathbf{R}$.

Cela découle du théorème des valeurs intermédiaires.

Définition

Un espace métrique (X, d) *est* connexe par arcs *si deux points quelconques de* X *peuvent être reliés par un arc continu i.e. si*

$$\forall x, y \in X, \quad \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1]; X) \quad \textit{tel que} \quad \gamma(0) = x \quad \textit{et} \quad \gamma(1) = y.$$

Proposition

Si (X, d) *est connexe par arcs alors* (X, d) *est connexe.*

Preuve. Si f est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et si x et y sont reliés par un arc continu γ, le théorème des valeurs intermédiaires impose à $f \circ \gamma$ de prendre la même valeur en 0 et 1. Donc f est constante. $\square$

On peut prouver que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.