MAT 311 **2016**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices #9 : Espaces de Lebesgue

Exercice 1. Soient f et g des fonctions mesurables, positives, définies sur $]0,1[$ et telles que $f(x)\,g(x) \geqslant 1$ p.p. sur $]0,1[$. Montrer que

$$1 \quad \leqslant \quad \Big(\int_{]0,1[} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{]0,1[} g(x)\,\mathrm{d}x\Big).$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$. On a

$$\begin{aligned}1 = \int_{]0,1[} 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{]0,1[} \sqrt{f(x)g(x)}\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{]0,1[} \sqrt{f(x)}^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{]0,1[} \sqrt{g(x)}^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{]0,1[} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{]0,1[} g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

En passant le tout au carré, on obtient l'inégalité recherchée.

Exercice 2. Étudier les cas d'égalité :
a) dans l'inégalité de Hölder ;
b) dans l'inégalité de Minkowski.

Pour s'échauffer, on va redémontrer les inégalités en question par une méthode élémentaire, i.e. sans convexité. On regarde sur $\mathbf{R}_+$ la fonction auxiliaire $\varphi : t \mapsto \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$ pour p et q des nombres réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a $\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} = t^{p-1}(1 - \frac{1}{t^{p+q}})$, donc φ est une fonction qui a un unique minimum égal à 1 en $t = 1$ sur $\mathbf{R}_+$. En excluant le cas trivial où $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, on peut regarder $\varphi(\frac{\alpha^{\frac{1}{q}}}{\beta^{\frac{1}{p}}})$ et on voit qu'on a :

$$\alpha\beta \quad \leqslant \quad \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

avec

$$\alpha\beta = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^p = \beta^q.$$

Ceci permet d'en déduire comme dans le cours (i.e. en prenant $\alpha = \dfrac{|\,f(x)\,|}{\|\,f\,\|_{L^p}}$ et $\beta = \dfrac{|\,g(x)\,|}{\|\,g\,\|_{L^q}}$) l'inégalité de Hölder pour $f, g : \Omega \to \mathbf{C}$, avec égalité si, et seulement si, il existe deux nombres $\lambda, \mu \geqslant 0$ non tous deux nuls tels que $\lambda\,|\,f(x)\,|^p = \mu\,|\,g(x)\,|^q$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Cela permet aussi de retrouver l'inégalité de Minkowski. Pour le cas d'égalité, on voit d'abord que les fonctions $|\,f\,|^p$, $|\,g\,|^p$ et $|\,f + g\,|^p$ doivent être positivement proportionnelles presque partout par le cas d'égalité dans Hölder, puis par le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, que f et g doivent être positivement proportionnelles.

Exercice 3. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions positives mesurables, définies sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, et soient $p_1, \ldots, p_n > 1$ tels que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. Montrer que

$$\int_\Omega \left(\prod_{i=1}^n f_i(x) \right) \mathrm{d}x \quad \leqslant \quad \prod_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i(x)|^{p_i} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p_i}.$$

C'est une récurrence finie sur l'inégalité de Hölder (même principe que pour obtenir une inégalité de convexité avec plus de deux points).

Exercice 4. Soient $p \geqslant 2$ et f et g deux fonctions mesurables à valeurs réelles, définies sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$.

1) Montrer que $x \mapsto (x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ sur $\mathbf{R}_+$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

On dérive la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto (x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$, ce qui donne

$$\varphi'(x) = px\big((x^2+1)^{\frac{p-2}{2}} - (x^2)^{\frac{p-2}{2}}\big) \geqslant 0.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$.

2) En déduire que $\alpha^p + \beta^p \leqslant (\alpha^2+\beta^2)^{p/2}$, pour tout $\alpha, \beta \geqslant 0$.

C'est une inégalité homogène de degré p en α et en β, d'où l'idée de travailler avec le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ quand il a un sens. Le cas $\beta = 0$ est immédiat et pour $\beta > 0$ on se ramène à $\varphi(\frac{\alpha}{\beta}) \geqslant \varphi(0) = 0$ (en multipliant par β^p l'inégalité ainsi obtenue).

3) [Inégalité de Clarkson] Montrer, en utilisant la question précédente et le fait que $t \mapsto |t|^{p/2}$ est convexe, que

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |f(x)-g(x)|^p \, \mathrm{d}x \quad \leqslant \quad 2^{p-1} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right).$$

Avec $\alpha = |f(x)+g(x)|$ et $\beta = |f(x)-g(x)|$ et en développant les carrés dans le majorant, la question précédente fournit :

$$|f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p \quad \leqslant \quad (2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2)^{\frac{p}{2}} \quad = \quad 2^{\frac{p}{2}}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)^{\frac{p}{2}}$$

et ce majorant vaut encore $2^p\big(\dfrac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}\big)^{\frac{p}{2}}$. On a fait apparaître une moyenne pour utiliser la convexité de l'application $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ (convexité impliquée par $p \geqslant 2$), ce qui donne :

$$|f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p \quad \leqslant \quad 2^p\big(\frac{|f(x)|^2+|g(x)|^2}{2}\big)^{\frac{p}{2}} \quad \leqslant \quad \frac{2^p}{2}\big((|f(x)|^2)^{\frac{p}{2}} + (|f(x)|^2)^{\frac{p}{2}}\big),$$

et on conclut en intégrant sur Ω.

4) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toutes fonctions mesurables f et g vérifiant

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega |g(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant 1,$$

on a

$$\left(\int_\Omega |f-g|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \geqslant \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \left(\int_\Omega \left|\frac{f+g}{2}\right|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant 1-\delta.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour f et g comme dans l'énoncé et telles que $\left(\int_\Omega |f-g|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \geqslant \varepsilon$, l'inégalité de la question 3 donne

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant 2^{p-1}(1+1) - \int_\Omega |f(x)-g(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant 2^p - \varepsilon^p,$$

et en divisant par 2^p, il vient :

$$\int_\Omega \left|\frac{f+g}{2}\right|^p \, \mathrm{d}x \quad \leqslant \quad 1-(\frac{\varepsilon}{2})^p.$$

Finalement $\delta = 1 - \left(1-(\frac{\varepsilon}{2})^p\right)^{\frac{1}{p}}$ convient.

Remarque : cet énoncé pourra être compris comme un résultat de géométrie de la sphère unité de l'espace de Banach $L^p(\Omega, \mathrm{d}x)$ des (classes de) fonctions f telles que $\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty$. Dans cet espace, les fonctions f et g comme ci-dessus définissent des vecteurs de la sphère unité. L'exercice dit alors que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si deux vecteurs unité de $L^p(\Omega, \mathrm{d}x)$ sont à distance $\geqslant \varepsilon$ l'un de l'autre, alors leur moyenne est à distance $\geqslant \delta$ de la sphère unité.

Exercice 5. [Équation fonctionnelle de Cauchy] Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction (définie en tout point de $\mathbf{R}$) vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

1) On note $g(x) := f(x) - f(1)\,x$. Montrer que g est 1-périodique et vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy.
2) Montrer que $g(n\,x) = n\,g(x)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$.
3) Montrer que $g(r\,x) = r\,g(x)$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$.
4) On suppose dans cette question que f est bornée sur $[0,1]$. Déterminer f.
5) Soit h une fonction 1-périodique telle que $h \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Montrer que, pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$\int_{[0,1]} h(x) \, \mathrm{d}x = \int_{[0,1]} h(x+y) \, \mathrm{d}x.$$

6) On suppose dans cette question que f est intégrable sur $[0,1]$. Déterminer f.
7) On suppose dans les questions qui suivent que f est mesurable. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{Q} - \{\mathbf{0}\}$ tel que

$$\int_{[0,1]} e^{i\alpha g(x)} \, \mathrm{d}x \neq 0.$$

8) Montrer que, pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\alpha g(y) \in 2\pi\mathbf{Z}$. Conclure.

Exercice 6. On dit qu'un espace vectoriel normé est *séparable* s'il contient une suite dénombrable et dense.
1) Soit $p \geqslant 1$. Montrer que $L^p(\mathbf{R})$ est séparable (on pourra penser à utiliser l'espace des fonctions en escalier).

On cherche une famille dénombrable dense pour la norme L^p. On sait déjà que $\mathscr{C}_c(\mathbf{R})$ est dense dans $L^p(\mathbf{R})$, donc il suffit de trouver une famille dénombrable avec laquelle on peut approcher arbitrairement bien en norme L^p n'importe quelle fonction continue à support compact sur $\mathbf{R}$. Soit $g \in \mathscr{C}_c(\mathbf{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Déjà il existe $M \in \mathbf{Q}_+$ tel que g est nul en dehors de $[-M; M]$. Par le théorème de Heine, la fonction g est uniformément continue sur $[-M; M]$; en particulier, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ on a $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \frac{1}{N}$. Avec ces considérations, on trouve une fonction en escalier

$$h_{M,N,\underline{\alpha}} = \sum_{k=0}^{2MN} \alpha_k \, \mathbf{1}_{[-M+\frac{k}{N};-M+\frac{k+1}{N}]},$$

dont les valeurs α_k forment une famille $\underline{\alpha} = \{\alpha_k\}_{k=0}^{2MN}$ de nombres rationnels, et qui approche g à ε près **en norme** $\|\cdot\|_\infty$. Pour vérifier que cela donne le résultat voulu en norme L^p, on calcule :

$$\left(\int_{\mathbf{R}} |g(x) - h_{M,N,\underline{\alpha}}(x)| \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-M}^{M} |g(x) - h_{M,N,\underline{\alpha}}(x)| \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \cdot (2M)^{\frac{1}{p}}.$$

Bref, la famille dénombrable des fonctions $h_{M,N,\underline{\alpha}}$ pour $M, N \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}$ et $\underline{\alpha} \in \mathbf{Q}^{2MN}$ est dense dans $(L^p(\mathbf{R}), \|\cdot\|_{L^p})$.

2) Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, on note

$$B_{a,b} := \left\{ f \in L^\infty(\mathbf{R}) \, : \, ||f - \mathbf{1}_{]a,b[}||_{L^\infty(\mathbf{R})} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Montrer que

$$B_{a,b} \cap B_{a',b'} \neq \varnothing \qquad \Leftrightarrow \qquad]a, b[=]a', b'[\, .$$

Supposons que $B_{a,b} \cap B_{a',b'} \neq \varnothing$; alors il existe $f \in L^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\| f - \mathbf{1}_{]a;b[} \| < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \| f - \mathbf{1}_{]a';b'[} \| < \frac{1}{2},$$

ce qui implique que $\| \mathbf{1}_{]a;b[} - \mathbf{1}_{]a';b'[} \| < 1$. Ceci impose que $a = a'$ et $b = b'$ car sinon il existerait un intervalle de longueur, c'est-à-dire de mesure de Lebesgue, > 0 et donc non négligeable sur lequel les valeurs des deux fonctions caractéristiques diffèrent de 1, empêchant tout majorant essentiel de $|\mathbf{1}_{]a;b[} - \mathbf{1}_{]a';b'[}|$ d'être < 1.

3) En utilisant la question précécente, montrer que $L^\infty(\mathbf{R})$ n'est pas séparable.

Le point précédent exhibe une famille non dénombrable de boules ouvertes deux à deux disjointes dans $L^\infty(\mathbf{R})$. Une famille dense doit rencontrer chacune de ces boules et les élements de cette famille qui sont dans les boules sont nécessairement deux à deux distincts : cela empêche une famille dense d'être dénombrable et réfute donc la séparabilité de $L^\infty(\mathbf{R})$.

Exercice 7. Soit $\alpha \in]0,1[$. On note $\mathcal{L}^\alpha(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f mesurables sur Ω à valeurs réelles telles que

$$\int_\Omega |f(x)|^\alpha \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Pour $f \in \mathcal{L}^\alpha(\Omega;\mathbf{C})$, on pose

$$\mathcal{N}_\alpha(f) := \left(\int_\Omega |f(x)|^\alpha \,\mathrm{d}x\right)^{1/\alpha}.$$

1) Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}^\alpha(\Omega)$, alors $f+g \in \mathcal{L}^\alpha(\Omega)$ et que $\lambda f \in \mathcal{L}^\alpha(\Omega)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soit $x \in \Omega$. On a soit $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ soit $|g(x)| \leqslant |f(x)|$, ce qui nous donne $(|f(x)| + |g(x)|)^\alpha \leqslant 2^\alpha |g(x)|^\alpha$ soit $(|f(x)|+|g(x)|)^\alpha \leqslant 2^\alpha |f(x)|^\alpha$. Dans tous les cas, on obtient

$$(|f(x)|+|g(x)|)^\alpha \leqslant 2^\alpha(|f(x)|^\alpha + |g(x)|^\alpha).$$

Ainsi

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^\alpha \,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)^\alpha \,\mathrm{d}x \leqslant 2^\alpha \left(\int_\Omega |f(x)|^\alpha \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g(x)|^\alpha \,\mathrm{d}x\right) < +\infty$$

et donc $f+g \in \mathcal{L}^\alpha(\Omega)$. L'étude de la stabilité par multiplication scalaire est plus simple. En effet si $f \in \mathcal{L}^\alpha(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_\Omega |\lambda f(x)| \,\mathrm{d}x = |\lambda| \int_\Omega |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Ainsi $\lambda f \in \mathcal{L}^\alpha(\Omega)$.

2) Montrer que, si $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$ p.p. alors

$$\mathcal{N}_\alpha(f) + \mathcal{N}_\alpha(g) \leqslant \mathcal{N}_\alpha(f+g).$$

Remarquons que le membre de gauche est une puissance de $\int_\Omega h(x)^{\frac{1}{p}}$ où $p = \alpha^{-1} > 1$ et $h(x) = (f(x)^\alpha)^p + (g(x)^\alpha)^p$, il est donc tentant d'essayer d'appliquer l'inégalité de Minkowski avec $p = \alpha^{-1}$. Posons $F(x) = f(x)^\alpha$ si $f(x) \geqslant 0$ et $F(x) = 0$ sinon, $G(x) = g(x)^\alpha$ si $g(x) \geqslant 0$ et $G(x) = 0$ sinon, de sorte que $F = f^\alpha$ et $G = g^\alpha$ presque partout. L'inégalité de Minkowski nous donne, pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}F(x)\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1} &+ G(x)\left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1} \\ &\leqslant (F(x)^p + G(x)^p)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} + \left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur Ω,, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega &\left(F(x)\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1} + G(x)\left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^{p-1}\right)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^p + \left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \int_\Omega (F(x)^p + G(x)^p)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, le terme de gauche est égal à $\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^p + \left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^p$. Comme F et G sont positives, ce terme est nul si et seulement si F et G sont nulles presque partout, auquel cas f et g sont nulles presque partout et l'inégalité est vérifiée. Si $\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^p + \left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^p$ est non nul on peut simplifier les deux côtés de l'inégalité par le terme

$$\left(\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^p + \left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

pour obtenir

$$\left(\left(\int_\Omega F(x)\,\mathrm{d}x\right)^p + \left(\int_\Omega G(x)\,\mathrm{d}x\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_\Omega (F(x)^p + G(x)^p)^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{d}x.$$

En remplaçant $F(x)$ par $f(x)^\alpha$, $G(x)$ par $g(x)^\alpha$ et p par α^{-1}, on obtient

$$\left(\left(\int_\Omega f(x)^\alpha\,\mathrm{d}x\right)^{\alpha^{-1}} + \left(\int_\Omega g(x)^\alpha\,\mathrm{d}x\right)^{\alpha^{-1}}\right)^\alpha \leqslant \int_\Omega (f(x)+g(x))^\alpha\,\mathrm{d}x.$$

En élevant les deux côtés à la puissance α^{-1}, on obtient l'inégalité

$$\mathcal{N}_\alpha(f) + \mathcal{N}_\alpha(g) \leqslant \mathcal{N}_\alpha(f+g).$$

3) Montrer que

$$(\mathcal{N}_\alpha(f+g))^\alpha \leqslant (\mathcal{N}_\alpha(f))^\alpha + (\mathcal{N}_\alpha(g))^\alpha\,.$$

Considérons tout d'abord le cas où f et g sont positives. L'inégalité sera démontrée une fois démontré que pour tout $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ on a $(x+y)^\alpha \leqslant x^\alpha + y^\alpha$. C'est vrai lorsque $x = 0$, on peut donc supposer $x > 0$ auquel cas l'inégalité est équivalente à $(1 + x^{-1}y)^\alpha \leqslant 1 + (x^{-1}y)^\alpha$. Considérons la fonction $t \mapsto 1 + t^\alpha - (1+t)^\alpha$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$. Elle est continue, nulle pour $t = 0$ et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto \alpha(t^\alpha - (1+t)^{\alpha-1}) < 0$ pour $t > 0$ puisque $0 < \alpha < 1$. On en déduit donc que $1 + t^\alpha \geqslant (1+t)^\alpha$ pour tout $t \geqslant 0$. Ainsi $(x+y)^\alpha \leqslant x^\alpha + y^\alpha$ pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, et donc

$$\int_\Omega (f(x)+g(x))^\alpha\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega f(x)^\alpha\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x)^\alpha\,\mathrm{d}x$$

pour f et g positive. Lorsque f et g ne sont pas nécessairement positives, on a, pour tout $x \in \Omega$,

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|,$$

ce qui nous donne $\mathcal{N}_\alpha(f+g)^\alpha \leqslant \mathcal{N}_\alpha(|f| + |g|)^\alpha$. Comme $\mathcal{N}(|f|+|g|)^\alpha \leqslant \mathcal{N}_\alpha(|f|)^\alpha + \mathcal{N}_\alpha(|g|)^\alpha$, on en déduit que

$$\mathcal{N}_\alpha(f+g)^\alpha \leqslant \mathcal{N}_\alpha(|f|)^\alpha + \mathcal{N}_\alpha(|g|)^\alpha = \mathcal{N}_\alpha(f)^\alpha + \mathcal{N}_\alpha(g)^\alpha.$$

4) Notons $L^\alpha(\Omega)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des classes de fonctions de $\mathcal{L}^\alpha(\Omega)$ égales p.p. sur Ω. Montrer que l'expression

$$\mathrm{d}([f],[g]) = \int_\Omega |f(x) - g(x)|^\alpha\,\mathrm{d}x, \qquad \forall [f],[g] \in L^\alpha(\Omega),$$

définit une distance sur $L^\alpha(\Omega)$. Cette distance provient-elle d'une norme ?

Vérifions que d est une distance. Si $\mathrm{d}([f],[g]) = 0$, on a $\int_\Omega |f(x) - g(x)|^\alpha\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$ et donc $[f] = [g]$. On a donc $\mathrm{d}([f],[g]) = 0$ si et seulement si $[f]=[g]$. La propriété de symétrie $(\mathrm{d}([f],[g])=\mathrm{d}([g],[f]))$ est immédiate, il reste donc à vérifier l'inégalité triangulaire. En remarquant que $\mathrm{d}([f],[g])=\mathcal{N}_\alpha(f-g)^\alpha$, c'est une conséquence immédiate de la question 3).

Cette distance ne provient pas d'une norme. En effet si tel était le cas, il existerait une norme $||\ ||$ telle que pour tout $[f]$ et $[g]$ dans $L^\alpha(\Omega)$, $\mathrm{d}([f],[g])=||f-g||$. En particulier, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, on devrait avoir $\mathrm{d}(\lambda[f],\lambda[g])=|\lambda|\mathrm{d}([f],[g])$, ce qui n'est pas le cas puisque pour $f\in\mathcal{L}^\alpha(\Omega)$ et $\lambda\in\mathbf{R}$, on a $\mathcal{N}_\alpha(\lambda f)^\alpha=|f|^\alpha\mathcal{N}_\alpha(f)^\alpha$.

Exercice 8. Soit $p\in]1,+\infty[$ et $q\in]1,+\infty[$ son exposant conjugué. On se donne les fonctions $f\in L^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ et $g\in L^q(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

1) Pour tout $x\in\mathbf{R}^N$, montrer que $y\mapsto f(x-y)\,g(y)$ est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^N$.

On calcule à $x\in\mathbf{R}^N$ fixé :

$$\int_{\mathbf{R}^N}|f(x-y)g(y)|\ \mathrm{d}y\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^N}|f(x-y)|^p\ \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\mathbf{R}^N}|g(y)|^q\ \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q},$$

la première étape étant l'inégalité de Hölder et la seconde provenant du changement de variables $y\mapsto x-y$.

On pose

$$(f\star g)(x):=\int_{\mathbf{R}^N}f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y.$$

2) Montrer que la fonction $f\star g$ ainsi définie est bornée, avec

$$\sup_{\mathbf{R}^N}|f\star g|\leqslant\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}\cdot\|g\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}.$$

C'est le calcul de 1. qu'on fait précéder de

$$|(f\star g)(x)|\quad=\quad\left|\int_{\mathbf{R}^N}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right|\quad\leqslant\quad\int_{\mathbf{R}^N}|f(x-y)g(y)|\ \mathrm{d}y.$$

3) Établir la continuité de $f\star g$ (on pourra utiliser un argument de densité pour se ramener au cas où f et g sont continues à support compact).

Pour $\delta\in\mathbf{R}^N$, on note τ_δ l'application linéaire qui transforme une fonction $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ en la fonction $\tau_\delta(h):x\mapsto h(x-\delta)$. Par changement de variables, τ_δ stabilise tout espace $L^p(\mathbf{R}^N)$. On veut montrer que pour toutes $f\in L^p(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ et $g\in L^q(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$, la fonction $f\star g$ est continue, i.e. que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que pour tout vecteur δ de norme $<\eta$ on ait :

$$|(f\star g)(x-\delta)-(f\star g)(x)|<\varepsilon.$$

On reformule

$$|(f\star g)(x-\delta)-(f\star g)(x)|\quad=\quad|\tau_\delta(f\star g)(x)-(f\star g)(x)|\quad=\quad\left|\big(\tau_\delta(f)\star g\big)(x)-(f\star g)(x)\right|.$$

Mais par la formule intégrale définissant la convolution, on voit qu'on a

$$\big(\tau_\delta(f)\star g\big)-(f\star g)=\big(\tau_\delta(f)-f\big)\star g,$$

et en reprenant le calcul de 2. avec $\tau_\delta(f) - f$ à la place de f, on obtient

$$|(f\star g)(x-\delta) - (f\star g)(x)| \quad = \quad |\big(\tau_\delta(f) - f\big)\star g| \quad \leqslant \quad \|\tau_\delta(f) - f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}\,.$$

On peut alors conclure par continuité des translations.

Exercice 9. Soient $f \in L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ et $g \in \mathscr{C}_c(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$. Pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, on pose

$$g_n(x) := n^N\, g(nx).$$

Étudier la convergence dans $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ de la suite $(f\star g_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$f\star g_n(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\, g_n(y)\,\mathrm{d}y.$$

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ et $g \in \mathscr{C}_c(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$. Posons $M = \int_{\mathbf{R}^N} g(x)\,\mathrm{d}x$ Remarquons que la formule de changement de variable nous donne $M = \int_{\mathbf{R}^N} g_n(x)\,dx$ pour tout $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^N} |f\star g_n(x) - Mf(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}^N}\left|\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g_n(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbf{R}^N} g_n(y)f(x)\,dy\right|\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y) - f(x)|\cdot|g_n(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y) - f(x)|\cdot|g_n(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbf{R}^N} ||t_y(f) - f||_1|g_n(y)|\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

La deuxième égalité est une conséquence du théorème de Tonelli et $t_y(g)$ est la fonction de $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ définie presque partout par $x \mapsto f(x-y)$. Un changement de variable $y = z/n$ donne finalement

$$||f\star g_n - Mf||_1 \leqslant \int_{\mathbf{R}^N} ||t_{z/n}(f) - f||_1|g(z)|\,\mathrm{d}z.$$

Comme g est continue à support compact, il existe un compact K tel que $g(x) = 0$ si $x \notin K$. De plus par continuité de g, la fonction g est bornée sur K. Soit $C \geqslant 0$ tel que $|g| \leqslant C$. Ainsi

$$||f\star g_n - Mf||_1 \leqslant C\int_K ||t_{z/n}(f) - f||_1\,\mathrm{d}y.$$

Or par un résultat du cours, la fonction $z \mapsto t_z(f)$ est une fonction continue de $\mathbf{R}^N$ dans $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$. Le théorème de Heine implique qu'elle est uniformément continue sur K. Ainsi la suite de fonction $z \mapsto ||t_{z/n}(f) - f||_1$ converge uniformément vers 0 sur K, on en conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} ||f\star g_n - Mf||_1 = 0$$

autrement dit que $f\star g_n$ converge vers Mf dans $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R};\mathbf{R})$ telle que

$$\int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \forall x > 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{[x,0]} f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \forall x < 0.$$

1) Soit $g \in \mathscr{C}_c(\mathbf{R};\mathbf{R})$. Montrer que $f\star g = 0$.
2) En déduire que $f = 0$ p.p. sur $\mathbf{R}$.

Exercice 11. Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré. Prouver les assertions suivantes.

1. Toute $g \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ définit par la formule $f \mapsto \int fg \, \mathrm{d}\mu$ une forme linéaire continue de norme $\| g \|_{L^1}$ sur $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$.

   Soit $g \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $f \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$. Alors il existe $C \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant C$ pour presque tout $x \in X$. En particulier $|g(x)f(x)| \leqslant C|g(x)|$ pour presque tout $x \in X$. Comme g est intégrable, on en conclut que gf est intégrable, ce qui prouve que $\int_X fg \, \mathrm{d}\mu \in \mathbf{R}$ est bien défini. La linéarité de l'application $f \mapsto \int_X fg \, \mathrm{d}\mu$ est une conséquence directe de la linéarité de la multiplication par f. Montrons plutôt en détail que la forme linéaire $f \mapsto \int_X fg \, \mathrm{d}\mu$ est continue. Pour presque tout $x \in X$, on a
$$|f(x)g(x)| \leqslant ||f||_\infty |g(x)|$$
   et donc
$$\left| \int_X fg \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant ||f||_\infty \int_X |g| \, \mathrm{d}\mu = ||f||_\infty ||g||_1.$$
   Ceci prouve que la forme linéaire $f \mapsto \int_X fg \, \mathrm{d}\mu$ est continue de norme inférieure ou égal à $||g||_1$. Notons θ_f la forme linéaire continue $f \mapsto \int_X fg \, \mathrm{d}\mu$ et $||\theta_f||$ sa norme, on a donc montré $||\theta_f|| \leqslant ||f||_1$. Cette norme est atteinte. Il suffit en effet de considérer la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|/f(x)$ si $f(x) \neq 0$ et $g(x) = 0$ si $f(x) = 0$. On a bien $f \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$, $||f||_\infty \leqslant 1$ et $\int_X fg \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu = ||f||_1$.

2. Toute $g \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$ définit de même une forme linéaire continue sur $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ de norme $\leqslant \| g \|_{L^\infty}$, et on a égalité dans le cas où toute partie mesurable de mesure infinie contient une partie mesurable de mesure finie non nulle.

   Soit $g \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$. On considère désormais la forme linéaire $\theta_g(f) = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu$ définie sur $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$. Cette forme linéaire est continue car pour $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$, on a
$$|\theta_g(f)| \leqslant ||g||_\infty ||f||_1.$$
   Cette inégalité nous montre même que $||\theta_g|| \leqslant ||f||_1$. Montrons que cette inégalité est en fait une inégalité. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de $||g||_\infty$, l'ensemble $\{x \in X \, |g(x)| > ||g||_\infty - \epsilon\}$ est de mesure non nulle. L'hypothèse de l'énoncé implique que cette partie contient une partie mesurable A de mesure finie non nulle. Soit f la fonction $\mu(A)^{-1} 1_A |g|/g$. On a bien $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $||f||_1 = 1$. De plus
$$\theta_g(f) = \mu(A)^{-1} \int_X gf \, \mathrm{d}\mu = \int_A |g| \, \mathrm{d}\mu \geqslant \mu(A)^{-1} \int_A (||g||_\infty - \epsilon) \, \mathrm{d}\mu = ||g||_\infty - \epsilon.$$
   Ainsi on a $||g||_\infty - \epsilon \leqslant |\theta_g(f)| \leqslant ||\theta_g||$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit $||\theta_g|| \geqslant ||g||_\infty$ et finalement $||\theta_g|| = ||g||_\infty$.

Exercice 12. [Inégalité de Hardy] Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}_+^*)$ et pour tout $x > 0$, on note
$$F(x) := \frac{1}{x} \int_{[0,x]} f(t) \mathrm{d}t.$$
1) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
2) Supposons que $f \in \mathscr{C}_c(\mathbf{R}_+^*)$ est positive. Montrer que
$$\int_{\mathbf{R}_+^*} F(x)^p \mathrm{d}x = -p \int_{\mathbf{R}_+^*} F(x)^{p-1} x F'(x) \mathrm{d}x$$

puis en déduire que

$$\|F\|_{L^p(\mathbf{R}_+^*)} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}_+^*)} \,.$$

3) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité obtenue au 2).
4) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathscr{C}_c(\mathbf{R}_+^*)$ qui converge vers f dans $L^p(\mathbf{R}_+^*)$. Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ des images des éléments de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par $f \mapsto F$ converge dans $L^p(\mathbf{R}_+^*)$.
5) En déduire que l'application linéaire $f \mapsto F$, qui est bien définie de $\mathscr{C}_c(\mathbf{R}_+^*)$ dans $L^p(\mathbf{R}_+^*)$, se prolonge en une application linéaire continue de $L^p(\mathbf{R}_+^*)$ dans lui-même, dont la norme est inférieure ou égale à $\frac{p}{p-1}$.
6) Montrer que la norme de l'application linéaire continue $f \mapsto F$ de $L^p(\mathbf{R}_+^*)$ dans lui-même vaut exactement $\frac{p}{p-1}$.
7) L'application linéaire $f \mapsto F$ envoie-t-elle $L^1(\mathbf{R}_+^*)$ dans lui-même ?