MAT 311 **2016**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices #7 : Espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit hermitien sur H, un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On veut montrer qu'il existe $e_1, \ldots, e_n$, une base de H, dans laquelle

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad \text{si} \quad x := \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i, \quad \text{et} \quad y := \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i.$$

Remarque : par définition de la sesquilinéarité, pour qu'une forme sesquilinéaire hermitienne symétrique s'exprime comme ci-dessus dans une base $(e_i)_{i=1}^n$ il faut et suffit que la base en question soit orthonormée, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ vaut 1 ou 0 suivant que $i = j$ ou non. Autrement dit, le but de l'exercice est de prouver qu'en dimension finie tout produit scalaire hermitien admet une base orthonormée.

1) Montrer que le résultat est vrai lorsque $\dim H = 1$.

Tout vecteur non nul, disons e, convient presque puisque $\mu = \langle e, e\rangle$ est non nul (le produit scalaire n'est pas nul !) : il suffit alors de prendre la base formée du vecteur unitaire $\frac{e}{\sqrt{\mu}}$.

2) Montrer que si H est de dimension $n \geqslant 1$ il existe e_1 tel que $\langle e_1, e_1\rangle = 1$. Montrer que

$$(\mathbf{C}e_1)^{\perp} := \{x \in H \,:\, \langle x, e_1\rangle = 0\},$$

est un espace de dimension $n-1$ et que la restriction de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ à $(\mathbf{C}e_1)^{\perp}$ est un produit hermitien. Conclure.

La formule de polarisation implique que si tous les vecteurs étaient isotropes, c'est-à-dire si on avait $\langle x, x\rangle = 0$ pour tout x, alors $\langle\cdot,\cdot\rangle$ serait nul : c'est exclu en dimension > 0. Quitte à normaliser comme à la question précédente, on sait donc trouver un vecteur, disons e_1, de norme 1. En passant à l'orthogonal, cette remarque permet de prouver l'existence d'une base orthonormée par récurrence sur la dimension de l'espace. Ceci est possible car l'orthogonal d'un sous-espace (automatiquement fermé en dimension finie) est un supplémentaire du sous-espace. L'autre point à ne pas manquer est de penser à vérifier que la restriction d'un produit scalaire hermitien à un sous-espace vectoriel quelconque est encore un produit scalaire hermitien pour le sous-espace en question (ici $e_1^{\perp}$) ; cela ne pose pas de difficulté particulière.

Bref, l'exercice était assez mal posé car (pour une fois) il mâche un peu trop le travail et spécialise des faits généraux intéressants.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert. On suppose que H admet une base hilbertienne, disons $(e_n)_{n\geqslant 0}$ (de façon équivalente d'après le cours, on suppose que H est séparable). Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. Montrer que la partie

$$\left\{ x \in H \,:\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, e_n \text{ avec } |x_n| \leqslant a_n \right\}$$

est un compact de H.

On utilise le critère séquentiel et on se donne pour cela une suite $\{x^k\}_{k\geqslant 0}$ dans H. On écrit chaque x^k dans la base hilbertienne donnée : $x^k = \sum_n x_n^k$ avec $x_n^k \in \mathbf{C}$. Il faut produire une valeur d'adhérence candidate pour la suite $\{x^k\}_{k\geqslant 0}$; on le fait en travaillant coordonnée par coordonnée suivant la base hilbertienne. Pour $n=0$: comme la suite des x_0^k pour $k\geqslant 0$ est bornée par a_0, il existe ξ_0 et une extraction φ_0 tels que la suite $\{x_0^{\varphi_0(k)}\}_{k\geqslant 0}$ converge vers ξ_0. Pour $n=1$: comme la suite des x_1^k pour $k\geqslant 0$ est bornée par a_1, il existe ξ_1 et une extraction φ_1 tels que la suite $\{x_1^{(\varphi_0\circ\varphi_1)(k)}\}_{k\geqslant 0}$ converge vers ξ_1. Par récurrence on obtient ainsi une suite de nombres complexes ξ_n et une suite d'extractions φ_n telles que pour tout $n\geqslant 0$ la suite $\{x_n^{(\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n)(k)}\}_{k\geqslant 0}$ converge vers ξ_n.

D'après les corrections de la PC 2, on sait que $\psi : m \mapsto (\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_m)(m)$ est une extraction. Ainsi $\{x^{\psi(k)}\}_{k\geqslant 0}$ est une suite extraite de $\{x^k\}_{k\geqslant 0}$ et on a pour tout $n\geqslant 0$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{\psi(k)} = \xi_n$. Cela implique pour tout $n\geqslant 0$ que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_n^{\psi(k)} - \xi_n|^2 = 0$, et aussi par passage à la limite que $|\xi_n| \leqslant a_n$, donc en particulier que $\sum_n \xi_n e_n$ est bien un élément de la partie de H considérée. Enfin, par convergence dominée pour la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ (pour laquelle $\int$ est remplacé par $\sum_{n\geqslant 0}$), et grâce à la condition $|x_n^{\psi(k)} - \xi_n|^2 \leqslant 4a_n^2$ qu'on voit comme une condition de domination uniforme en k par une suite sommable (= intégrable), on a :

$$\lim_{k\to\infty} \big(\| x^{\psi(k)} - \sum_{n\geqslant 0} \xi_n e_n \|_H\big)^2 = \lim_{k\to\infty} \big(\sum_{n\geqslant 0} |x_n^{\psi(k)} - \xi_n|^2\big) = \sum_{n\geqslant 0} \lim_{k\to\infty} |x_n^{\psi(k)} - \xi_n|^2 = 0,$$

ce qui est la convergence dans H cherchée.

Exercice 3. On considère l'espace de Hilbert $H := \mathrm{L}^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$ muni de la forme hermitienne

$$(f,g)_H = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

On veut montrer que les fonctions polynômes (à valeurs dans $\mathbf{C}$) forment un sous-espace vectoriel dense de H. Pour $f\in H$, on pose :

$$F(z) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{zt-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la fonction F est bien définie et admet un développement en série entière convergeant sur $\mathbf{C}$

$$F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \Big(\frac{z^j}{j!}\int_{\mathbf{R}} f(t) t^j e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big).$$

On commence par vérifier que l'intégrale qui définit $F(z)$ a un sens ; par Cauchy-Schwarz(seconde inégalité), on a :

$$|F(z)| \quad\leqslant\quad \int_{\mathbf{R}} |f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} e^{zt-\frac{t^2}{2}}|\;\mathrm{d}t \quad\leqslant\quad \Big(\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\int_{\mathbf{R}} |e^{zt}|^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}.$$

Le premier facteur du majorant est fini car $f\in H$ et le second l'est car on a :

$$\int_{\mathbf{R}} |e^{zt}|^2\ e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} e^{2\mathrm{Re}(z)t-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} e^{-\left(t-\mathrm{Re}(z)\right)^2} e^{\mathrm{Re}(z)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}e^{\mathrm{Re}(z)^2}.$$

On va maintenant combiner le théorème de convergence dominée avec le développement en série entière $e^{zt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n t^n}{n!}$. La condition de convergence ponctuelle presque partout est automatiquement satisfaite, précisément parce qu'on part d'un développement en série entière. Pour la condition de majoration universelle des fonctions sommes partielles par une fonction intégrable, on écrit pour $N \in \mathbf{N}$:

$$|\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} f(t) t^n e^{-t^2}| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{|zt|^n}{n!}\ |f(t)|\ e^{-t^2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|zt|^n}{n!}\ |f(t)|\ e^{-t^2} = |f(t)|\ e^{|z||t|} e^{-t^2}.$$

Par un calcul analogue au calcul précédent (i.e. Cauchy-Schwartz en « répartissant » l'exponentielle $e^{-t^2} = e^{\frac{-t^2}{2}} e^{\frac{-t^2}{2}}$ sur chaque facteur), on voit que le majorant est bien une fonction intégrable (on peut avoir envie de découper l'intégrale en deux, de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$, si on n'aime pas $|t|$). Finalement, on peut intervertir et obtenir la formule proposée.

2) On suppose que f est orthogonale pour le produit hermitien $(\cdot,\cdot)_H$ à l'espace engendré par les fonctions polynômes. Montrer que $F \equiv 0$ et donc que $F(ix) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Le fait que $F(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ provient directement de la formule de la question précédente (qui peut se lire comme le fait que la fonction F encode tous les produits scalaires de f avec les fonctions monomiales). Il implique comme cas particulier l'annulation de F sur les nombres complexes imaginaires purs.

3) Montrer que $f = 0$ et conclure.

Explicitement on a : $F(-ix) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-t^2} e^{-itx}\,\mathrm{d}x$, ce qui suggère de voir $F(-ix)$ comme la valeur en x de la transformée de Fourier de $g : u \mapsto f(u)e^{-u^2}$. Pour justifier cela, le tout est de voir que g est bien dans $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, ce qu'on peut voir grâce à Cauchy-Schwarz, en écrivant $g(u) = f(u)e^{\frac{-u^2}{2}} \cdot e^{\frac{-u^2}{2}}$ et en utilisant le fait que $f \in H$ (*cf* question 1). Ainsi $\hat{g}$ est nulle sur $\mathbf{R}$, et par inversion de Fourier on en déduit que g, et donc f, est nulle presque partout dès que f est orthogonale à toutes les fonctions polynomiales pour le produit hermitien $(\cdot,\cdot)_H$. Ceci se reformule en disant que l'orthogonal pour le produit hermitien $(\cdot,\cdot)_H$ du sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$: par le critère de densité du cours, cela dit que le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales est dense dans $H = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$.

Exercice 4. On considère l'espace de Hilbert $H = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$. On définit les *polynômes d'Hermite* :

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}),$$

ainsi que les *fonctions d'Hermite* :

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\, H_n(x).$$

D'abord, on se chauffe en calculant quelques polynômes d'Hermite, ce qui donne :

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad \text{etc.}$$

On sent qu'il y aurait une question de parité à creuser, mais ce n'est pas dans les questions de l'exercice.

1) Montrer que H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n, et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de H) à l'espace vectoriel engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Le fait que H_n soit un polynôme de degré n (« assertion A_n ») se prouve évidemment par récurrence. L'étape $n = 0$ est triviale. La preuve de l'implication « $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ » se démontre par un calcul : $H_{n+1} = -e^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(H_n(x)e^{-x^2}\big) = -H_n'(x) + 2xH_n(x)$.

Pour la question de l'orthogonalité, on se donne une fonction polynomiale P de degré au plus $n-1$ et on calcule :

$$\int_{\mathbf{R}} P(x)H_n(x)\, e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} (-1)^n P(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})\, \mathrm{d}x,$$

ce qui donne, après n intégrations par parties : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} P(x)H_n(x)\, e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}^n P}{\mathrm{d}x^n}(x)\, \mathrm{d}x$, soit 0.

2) Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

On ne perd rien en généralité à supposer que $n > m$, et alors :

$$\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\psi_m(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

La nullité découle alors de la seconde partie de la question précédente.

3) Montrer que $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$ et que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n = 2nH_{n-1}$.

On sait déjà qu'on a l'identité

$$(*_n) \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

pour tout $n \geqslant 0$.

On prouve le résultat (c'est-à-dire les deux égalités proposées pour chaque indice n) par récurrence. C'est vrai pour les petits indices par les tout premiers calculs. Ensuite, on calcule en utilisant $(*_{n+1})$:

$$\begin{aligned} &H_{n+2}(x) - 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x) \\ &= 2xH_{n+1}(x) - H_{n+1}'(x) - 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x) \\ &= -\big(H_{n+1}'(x) - 2(n+1)H_n(x)\big), \end{aligned}$$

ce qui fait voir que qu'il suffit de prouver la nullité du membre de droite ci-dessus pour établir la récurrence, car on a les deux égalités cherchées d'un coup. Par conséquent, on calcule en dérivant $(*_n)$:

$$\begin{aligned} H'_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x) &= 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H'_n(x) - 2(n+1)H_n(x) \\ &= 2xH'_n(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H'_n(x) - 2nH_n(x) \end{aligned}$$

Puis on utilise l'hypothèse de récurrence pour voir que tout ceci vaut :

$$2x2nH_{n-1}(x) - 2nH'_{n-1}(x) - 2nH_n(x) = 2n\big(-H'_{n-1}(x) + 2xH_{n-1}(x) - H_n(x)\big),$$

ce qui est nul par $(*_{n-1})$.

Autre méthode : on peut aussi calculer $H_{n+1}(x)$ grâce à la formule de Leibniz pour les dérivations itérées. Plus précisément, on a :

$$H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(e^{-x^2}) = (-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(-2xe^{-x^2}) = (-1)^n e^{x^2}\sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}(2x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}),$$

somme dans laquelle seuls les termes pour $j=0$ et $j=1$ sont $\neq 0$. Ainsi on a :

$$H_{n+1}(x) = (-1)^n 2xe^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}) + n(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(e^{-x^2}) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

et la seconde formule (pour H'_n) s'en déduit par comparaison à $(*_n)$.

4) Montrer que

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_n = 2n\psi_{n-1} \qquad \text{et que} \qquad \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right)\psi_n = \psi_{n+1}.$$

En déduire que $\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2\right)\psi_n = (2n+1)\psi_n$. Retrouver le résultat de la question 2).

Pour la première identité demandée, on a : $\psi'_n(x) + x\psi_n(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}H'_n(x)$, soit $2n\psi_n(x)$ par la question qui précède. Pour la deuxième identité demandée, on calcule :

$$\psi'_n(x) - x\psi_n(x) = \big(H'_n(x) - 2xH_n(x)\big)e^{\frac{-x^2}{2}},$$

ce qui vaut $-\psi_{n+1}(x)$ par $(*_n)$.

Pour la suite, on peut écrire formellement :

$$\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\big)\circ\big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\big) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2 + \mathrm{id},$$

le terme id provenant du crochet $[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \cdot x] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\circ\cdot x - \cdot x\circ\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, par calcul (ou *cf* cours de mécanique quantique). Bref, on a : $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2)(\psi_n) = [(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x)\circ(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x)](\psi_n) - \mathrm{id}(\psi_n)$, autrement dit : $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2)(\psi_n) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x)(\psi_{n+1}) - \psi_n = (2n+1)\psi_n$ par les points qui précèdent.

Pour le point qui précède et avec une double intégration par parties, il vient :

$$(2n+1)\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \big(-\psi_n''(x) + x^2\psi_n(x)\big)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\big(-\psi_m''(x) + x^2\psi_m(x)\big)\,\mathrm{d}x = (2m+1)\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque : le calcul ci-dessus montrer que l'opérateur $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2$ est auto-adjoint pour la forme $(f,g) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$; les ψ_n étant des vecteurs propres pour cet opérateur, ils forment bien une famille orthogonale (les valeurs propres sont deux à deux distinctes).

5) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Conclure.

On a

$$\int_{\mathbf{R}} |\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} H_n(x)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^n\int_{\mathbf{R}} H_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}n^n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

et par n intégrations par parties, on obtient : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = 2^n n!\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}2^n n!$. Ceci implique que la famille de fonctions $\big(\dfrac{\psi_n(x)}{(\sqrt{\pi}2^n n!)^{\frac{1}{2}}}\big)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthonormée de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R},\mathrm{d}x)$). En combinant cela au résultat de densité de l'exercice précédent, on en déduit que cette famille est en fait une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R},\mathrm{d}x)$.

Moralité : dans l'exercice précédent, on a montré que les fonctions polynomiales formaient une famille dense dans l'espace $H = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$, par un argument d'orthogonal trivial. Dans le présent exercice, il y a une idée physique sous-jacente (utile à la compréhension mais pas formellement nécessaire) : la diagonalisation de l'opérateur hamiltonien $\left(-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2\right)$ associé à l'oscillateur harmonique quantique. Par analogie avec la situation de dimension finie, on peut supposer que cette diagonalisation est possible dans une base orthonormale car l'opérateur est auto-adjoint (cela se voit par intégration par parties). À la fin de l'exercice, on voit en effet que les fonctions propres sont les fonctions d'Hermite, qu'elles sont orthogonales dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R},\mathrm{d}x)$ et que les niveaux d'énergie sont non dégénérés puisque les espaces propres sont des droites.

Exercice 5. On considère dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ le sous-espace

$$F := \{f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R}) \;:\; f(-t) = -f(t)\}.$$

Déterminer l'opérateur de projection orthogonale sur F.

Exercice 6. On considère dans $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ l'ensemble

$$F := \{(x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \;:\; |x_n| \leqslant 1\}.$$

1) Montrer que F est un convexe fermé.

La convexité est une conséquence de l'inégalité triangulaire. Pour voir que F est fermé on utilise le critère séquentiel et on se donne $(x^k)_{k\geqslant 0}$ une suite d'éléments de F qui converge dans $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ vers un élément $x=(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. En écrivant $x^k=(x^k_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, la condition d'être dans F se traduit par $|x^k_n|\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$ et tout $k\geqslant 0$. La convergence $\lim\limits_{k\to\infty}\| x-x^k \|_{\ell^2}=0$ s'écrit $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}|x_n-x^k_n|^2\to 0$ quand $k\to\infty$, ce qui implique que pour tout $n\in\mathbf{Z}$, on a $\lim\limits_{k\to\infty}x^k_n=x_n$ et donc $|x_n|\leqslant 1$ par passage à la limite.

2) Déterminer la projection d'un élément de $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ sur F.

Pour $x=(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$, il s'agit de minimiser la quantité $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}|x_n-y_n|^2$ quand $y=(y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ parcourt l'ensemble des éléments de $\ell^2(\mathbf{Z};\mathbf{R})$ dont les coordonnées y_n sont de valeur absolue $\leqslant 1$. Le théorème de projection dit que la borne inférieure de ces distances (au carré) est atteinte en une unique telle suite y. L'expression explicite de cette distance montre directement que la suite y est fabriquée à partir de x de la façon suivante : pour chaque $n\in\mathbf{Z}$, si $x_n\in[-1;1]$ on pose $y_n=x_n$ et sinon on pose $y_n=-1$ ou 1 suivant que $x_n<-1$ ou $x_n>1$ (c'est une projection coordonnée par coordonnée).

Exercice 7. 1) On note $S:\ell^2(\mathbf{N})\to\ell^2(\mathbf{N})$ l'application définie par

$$S\big((x_n)_{n\geqslant 0}\big):=(x_{n+1})_{n\geqslant 0}.$$

Déterminer l'adjoint S^* de S.

On calcule tout d'abord $\langle S(x),y\rangle$, qui vaut $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_{n+1}y_n$. Pour chaque $y=(y_n)_{n\geqslant 0}\in\ell^2(\mathbf{N})$, il s'agit de chercher $S^*(y)$ tel que $\langle S(x),y\rangle=\langle x,S^*(y)\rangle$ pour tout $x=(x_n)_{n\geqslant 0}\in\ell^2(\mathbf{N})$; autrement dit tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+1}y_n=\sum_{n=0}^{\infty}x_n(S^*(y))_n$$

pour tout $x=(x_n)_{n\geqslant 0}\in\ell^2(\mathbf{N})$. On voit que l'application T ci-dessous fait l'affaire.

2) Même question avec l'application $T:\ell^2(\mathbf{N})\to\ell^2(\mathbf{N})$ définie par

$$T\big((x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots)\big):=(0,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},\ldots).$$

Puisque $S^*=T$ et que $(S^*)^*=S$, on a : $T^*=S$.

Exercice 8. Soit $E=\mathscr{C}([0,1];\mathbf{R})$ l'espace préhilbertien muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle:=\int_{[0,1]}f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $p\geqslant 0$ et pour tout $a\in]0,1[$, on définit l'application

$$A(f):=\int_{[0,a]}t^p\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que A est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.
2) Montrer qu'il n'existe pas d'élément g de E tel que $A(f)=\langle f,g\rangle$ pour tout $f\in E$.

Exercice 9. Soit $H = \mathrm{L}^2([0,1];\mathbf{R})$. Pour tout $f \in H$, on pose

$$Tf(x) := \int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que T est une application continue de H dans H.
2) Déterminer la norme de T.
3) Déterminer T^* l'adjoint de T.

Exercice 10. Soit K une fonction de $\mathrm{L}^2([0,1]^2;\mathbf{C})$. On considère l'opérateur

$$T_K(f)(x) := \int_{[0,1]} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

de $\mathrm{L}^2([0,1],\mathbf{C})$ dans lui-même.
1) Déterminer T_K^*, l'adjoint de T_K.
2) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur K pour que T_K soit auto-adjoint (i.e. $T_K^* = T_K$).

Exercice 11. Soit $f \in \mathrm{L}^2(S^1;\mathbf{C})$.

Remarque : la notation S^1 signifie qu'on considère des fonctions d'une variable réelle, 2π-périodiques (et à valeurs complexes).

1) Montrer que

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(x)\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x,$$

les coefficients de Fourier de f, tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.

Par la formule de Parseval (dans sa version L^2 du cours de cette année), on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\,c_n(f)\,|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\,f(t)\,|^2\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

donc la suite des coefficients de Fourier est le terme général d'une série convergente.

Remarque : pour démontrer Parseval dans ce cadre L^2, on utilise deux théorèmes de densité, à savoir Stone-Weierstrass pour la densité en norme sup (et donc la densité L^2) des fonctions trigonométriques dans les fonctions continues 2π-périodiques, puis la densité L^2 de ces dernières dans $\mathrm{L}^2(S^1;\mathbf{C})$.

2) On suppose maintenant que $f \in \mathrm{L}^1(S^1;\mathbf{C})$, montrer que les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.

Par densité des fonctions continues à support compact dans $\mathrm{L}^1(]-\pi;\pi[;\mathbf{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, on sait qu'il existe $g \in \mathcal{C}_c(]-\pi;\pi[;\mathbf{C})$ telle que $\|\,f-g\,\|_1 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a dans ce cas :

$$|\,c_n(f) - c_n(g)\,| = |\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(t)-g(t)\big)e^{-int}\,\mathrm{d}t\,| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Le résultat en découle puisque la question 1 implique que $c_n(g) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, étant donné que $\mathcal{C}_c(]-\pi;\pi[;\mathbf{C}) \subset \mathrm{L}^2(]-\pi;\pi[;\mathbf{C})$.

Exercice 12. Soit H un espace de Hilbert et $A, B \in \mathcal{L}(H, H)$.
1) Montrer que $\|A^*\| = \|A\|$.

On travaille avec $A \neq 0$ (le cas $A = 0$ est trivial). Soit $x \in H$ un vecteur de norme 1. On a :

$$\| A(x) \|^2 = \langle A(x), A(x) \rangle = \langle x, (A^* \circ A)(x) \rangle \leqslant \| (A^* \circ A)(x) \| \leqslant \| A^* \circ A \| \leqslant \| A \| \cdot \| A^* \|.$$

En passant à la borne supérieure sur x, on obtient : $\| A \|^2 \leqslant \| A \| \cdot \| A^* \|$, et finalement $\| A \| \leqslant \| A^* \|$. Il reste à remarquer que $(A^*)^* = A$ pour en déduire que $\|A^*\| = \|A\|$.

Remarque : on peut aussi utiliser la formule $\|A^*(x)\| = \sup_{\|y\|=1} \langle A^*(x), y \rangle$; rappel : l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la majoration et le sup est atteint pour y égal à la normalisation du vecteur $A^*(x)$.

2) Montrer que $(A\,B)^* = B^*\,A^*$.

C'est complètement formel ; on a, pour tout $x, y \in H$, par définition d'un opérateur adjoint :

$$\langle (A \circ B)(x), y \rangle = \langle B(x), A^*(y) \rangle = \langle x, (B^* \circ A^*)(y) \rangle.$$

Ceci étant vérifié pour tous $x, y \in H$, par unicité de l'opérateur adjoint on en déduit bien que $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

3) Montrer que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$ et que $\overline{\mathrm{Im} A} = (\mathrm{Ker} A^*)^\perp$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^*)$. Pour tout $h \in H$, on a : $\langle x, A(h) \rangle = \langle A^*(x), h \rangle = \langle 0, h \rangle = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A^*) \subseteq \mathrm{Im}(A)^\perp$. Réciproquement si $x \in \mathrm{Im}(A)^\perp$, alors $\langle A^*(x), h \rangle = \langle x, A(h) \rangle = 0$ pour tout $h \in H$, soit $A^*(x) \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $x \in Ker(A^*)$.

Finalement, on obtient bien $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$, et en passant à l'orthogonal on a : $\mathrm{Ker}(A^*)^\perp = \big(\mathrm{Im}(A)^\perp\big)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)}$.

4) Montrer que A est inversible (i.e. A est bijective et A^{-1} est une application linéaire continue) si et seulement si A^* est inversible.

On se donne A inversible, c'est-à-dire admettant B linéaire, continue et telle que

$$A \circ B = B \circ A = \mathrm{id}_H.$$

On applique la prise d'adjoint à ces égalités, ce qui donne

$$B^* \circ A^* = A^* \circ B^* = \mathrm{id}_H^* = \mathrm{id}_H.$$

Par unicité A^* est linéaire, et par Cauchy-Schwarz elle est continue de même norme que A. On vient donc de voir que si A est inversible, alors A^* l'est aussi, et la réciproque découle à nouveau du fait que $(A^*)^* = A$.