Geometriae Dedicata **90:** 29–44, 2002.

Immeubles de Kac–Moody hyperboliques, groupes non isomorphes de même immeuble

(Hyperbolic Kac–Moody Buildings Nonisomorphic Groups with the Same Building)

BERTRAND RÉMY
Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Givat Ram Campus, 91904 Jerusalem, Israel. e-mail: remy@math.huji.ac.il

(Received: 6 January 2000; in final form: 28 November 2000)

Abstract. We first remark that Kac–Moody groups enable us to produce hyperbolic buildings – automatically endowed with nonuniform lattices. The main result then deals with groups whose buildings are trees or two-dimensional hyperbolic. It is a factorization theorem for abstract isomorphisms. It shows the existence of nonisomorphic Kac–Moody groups with the same associated isomorphism class of buildings.

Mathematics Subject Classifications (2000). 20E42; 51E24; 20B27; 20E08; 20G40.

Key words. Kac–Moody group, group combinatorics, twin buildings, hyperbolic building, tree, lattice

Introduction

Des progrès récents en théorie géométrique des groupes ont rendu envisageable d'étudier de nouveaux specimens de groupes discrets et de géométries, en les confrontant aux situations plus classiques des espaces symétriques ou des immeubles de Bruhat–Tits. Il est désormais réaliste de travailler sur des immeubles hyperboliques (où les appartements sont des pavages d'espaces hyperboliques), ou sur des (produits d') arbres de valence quelconque. Ces situations ont permis de construire de nouveaux groupes de Kazhdan [BS, CG, DJ], les deux dernières références utilisant précisément des immeubles hyperboliques. Quant aux produits d'arbres, ils ont permis à M. Burger et Sh. Mozes de construire les premiers groupes simples, de présentation finie, sans torsion [BM_1, BM_2].

Puisque par ailleurs la théorie de Kac–Moody fait un usage crucial des immeubles pour étudier les groupes du même nom [T_1], il est naturel de se demander si celle-ci contribue à produire de nouveaux objets comme ci-dessus. En matière de production de groupes discrets, un groupe de Kac–Moody sur un corps fini assez gros est réseau du produit de ses deux immeubles jumelés [CG, $Ré_1$]. Il est justifié dans le présent travail que certains immeubles hyperboliques sont associés à des groupes de Kac–Moody, cf. 2.3. En fait, pour prouver cela, on procède à certain nombre de choix, dont aucun n'est plus naturel que l'autre. Chacun d'eux fournit une donnée de définition de groupe de Kac–Moody. L'étude de la dépendance des classes d'isomorphisme abstrait des groupes obtenus en fonction de ces choix conduit au principal résultat de ce travail. C'est un théorème de dévissage d'isomorphismes abstraits, dans l'esprit d'un résultat classique de R. Steinberg pour les groupes de Chevalley sur les corps finis [C, 12.5.1].

THÉORÈME. *Soient G et G' deux groupes de Kac–Moody dont les immeubles sont tous isomorphes* ($\star$) *à un même un arbre localement fini ou* ($\star\star$) *à un même immeuble fuchsien à chambre régulière. Alors, à conjugaison près dans G, tout isomorphisme abstrait de G' sur G est la composition d'une permutation des racines simples et d'une éventuelle opposition globale du signe des racines.*

Les groupes G et G' en question sont munis d'une combinatoire de groupe indexée par un même système de racines infini, ce qui donne sens au dévissage ci-dessus; cf. 3.1 pour un énoncé plus précis. Un immeuble fuchsien est un immeuble hyperbolique dont les appartements sont des plans hyperboliques. Un exemple – les immeubles $I_{r,q+1}$ présentés en 1.2 – précise le problème des choix évoqué plus haut. Il montre qu'un produit de certains immeubles hyperboliques admet plusieurs classes d'isomorphisme de réseaux issus d'un même procédé de fabrication (de type arithmétique).

COROLLAIRE. *Pour q une puissance première et r un entier $\geqslant 5$, l'immeuble $I_{r,q+1}$ est associé à plusieurs classes d'isomorphisme abstrait de groupes de Kac–Moody.*

Il est classique de présenter les groupes de Kac–Moody comme les analogues en dimension infinie des groupes algébriques réductifs (déployés). Cette approche a l'avantage de structurer l'étude de ces groupes grâce aux combinatoires fines qu'elle suggère. L'usage des combinatoires de groupes est d'ailleurs l'outil principal quand il s'agit de justifier que les groupes de Kac–Moody sur les corps finis sont souvent des réseaux. C'est également l'ingrédient essentiel de démonstration du théorème principal. Au passage, les immeubles $I_{r,q+1}$ sont des espaces ressemblant aux arbres à bien des égards. En particulier, leurs groupes de Weyl comportent beaucoup de coefficients ∞, ce qui les fait définitivement échapper aux résultats de classification des immeubles jumelés de [MR, Mü]. Un approfondissement du corollaire consisterait à savoir décider si des groupes de Kac–Moody non isomorphes peuvent donner naissance au même jumelage d'immeubles $I_{r,q+1}$.

Cet article est organisé comme suit. La première section est constituée de rappels et conventions concernant les groupes de Kac–Moody et les immeubles hyperboliques. C'est dans la seconde section qu'on justifie que certains immeubles de groupes de Kac–Moody sont des espaces métriques CAT(-1). La troisième section est consacrée à la démonstration du théorème de factorisation «à la Steinberg». Enfin, la quatrième section utilise ce théorème pour prouver un résultat qui contient le corollaire ci-dessus.

1. Terminologie, notations, conventions

Cette section présente les deux théories qu'il s'agira de relier. Elle fixe aussi des conventions et notations utiles pour la suite.

1.1. GROUPES ET IMMEUBLES DE KAC–MOODY

J. Tits a proposé une définition fonctorielle de ces groupes, permettant de travailler sur des corps arbitraires [T_1]. Cette définition est basée sur une généralisation du théorème de Steinberg qui met en évidence une présentation des groupes semi-simples simplement connexes. Interviennent notamment une matrice de Cartan généralisée $A = [A_{st}] \in \mathbf{Z}^{S\times S}$ indexée par un ensemble fini S, et un corps de base $\mathbf{K}$.

Une référence pour les groupes de Kac–Moody est [T_1]. Un tel groupe G est à considérer dans le cadre combinatoire des *données radicielles jumelées*, raffinement des BN-paires ajusté à la situation. La définition de G par une présentation «à la Steinberg» privilégie deux BN-paires (B_+, N) et (B_-, N) dites *opposées* et possédant le sous-groupe N en commun. Les sous-groupes B_+ et B_- sont les *sous-groupes de Borel standard* (positif, resp. négatif); leur intersection T est le *sous-groupe de Cartan standard*. La *donnée radicielle jumelée standard* consiste en la donnée de T et d'une famille de sous-groupes $\{U_\alpha\}$, formée des *sous-groupes radiciels* (relatifs à T). La famille $\{U_\alpha\}$ est indexée par les racines α du groupe de Weyl W [R, 2.2], qui apparaît comme le sous-quotient N/T de G. On pose $U_+ := \langle U_\alpha \mid \alpha > 0\rangle$ et $U_- := \langle U_\alpha \mid \alpha < 0\rangle$, et on a $B_\varepsilon = T \ltimes U_\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm$). Le groupe de Weyl W est complètement déterminé par A: sa matrice de Coxeter $M = [M_{st}]$ est donnée par la correspondance: $M_{ss} = 1$ ($s \in S$), et pour $s \neq t$ dans S:

$$A_{st}A_{ts} = 0 \to M_{st} = 2, \qquad A_{st}A_{ts} = 1 \to M_{st} = 3, \qquad A_{st}A_{ts} = 2 \to M_{st} = 4,$$
$$A_{st}A_{ts} = 3 \to M_{st} = 6, \qquad A_{st}A_{ts} \geqslant 4 \to M_{st} = \infty.$$

La contrepartie géométrique (combinatoire) est l'existence d'*immeubles jumelés*. Cette notion consiste en la donnée de deux immeubles isomorphes dits *positifs et négatifs* sur lesquels G opère, et d'une relation d'opposition entre les chambres de ceux-ci. On appelle *immeuble de Kac–Moody* un immeuble qui apparaît dans le jumelage d'un groupe de Kac–Moody. Pour les données radicielles jumelées et les immeubles jumelés, voir [A] ou [Ré$_2$, §1 et §2]. Finissons en rappelant que les *cloisons* d'un immeuble sont ses simplexes de codimension 1, et que l'*épaisseur* d'une cloison est le nombre de chambres dont l'adhérence contient celle-ci.

1.2. IMMEUBLES HYPERBOLIQUES

Partons du théorème de Poincaré: le groupe des inversions relatives aux faces d'un polyèdre convenable est un groupe de Coxeter, qui opère naturellement sur un pavage de l'espace ambiant (euclidien, hyperbolique) par ce polyèdre [Mas, IV.H.11]. On parlera de *polyèdres de Poincaré* – voir 2.1 et 2.3. Voici la définition des immeubles hyperboliques proposée dans [GP].

DÉFINITION. Soit P un polyèdre de Poincaré dans $\mathbb{H}^n$. Un *immeuble hyperbolique de type P* est un complexe polyédral, union d'une famille de sous-complexes qu'on appelle *appartements*, qui sont tous isomorphes au pavage de $\mathbb{H}^n$ par P et qui vérifient les axiomes d'incidence suivants.

(i) Par deux points passe toujours un appartement.
(ii) Si Σ et Σ' sont deux appartements, il existe un isomorphisme polyédral fixant $\Sigma \cap \Sigma'$.

Il est sous-entendu que P est compact, mais l'éventualité de sommets à l'infini est prise en compte dans [GP], où la notion de complexe polyédral est d'ailleurs explicitée. Ce sont des espaces métriques CAT(-1), donc hyperboliques au sens de Gromov [BH, GH]. Les structures d'incidences additionnelles en font des espaces à la géométrie très riche et pour lesquels il est intéressant d'avoir des réseaux. On verra que l'approche géométrique permet de construire des réseaux cocompacts [Bou_1, GP], alors que la théorie de Kac–Moody montre qu'au moins certains de ces immeubles admettent aussi des réseaux non cocompacts [CG, $\mathrm{Ré}_1$].

EXEMPLES. (1) Les *immeubles fuchsiens* de [Bou_2] constituent un cas particulier de cette définition. Ils sont construits à partir de paramètres $(R, \underline{q})$ où $\underline{q}$ est une suite $(q_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de r entiers $\geqslant 2$ et R est un polytope à r côtés de $\mathbb{H}^2$ dont les faces (resp. les sommets) sont étiqueté(e)s circulairement par $\mathbf{Z}/r$ (resp. par les paires $\{i, i+1\}$, i dans $\mathbf{Z}/r$). On requiert en outre que l'angle au sommet $\{i, i+1\}$ soit de la forme $\pi/m_{i,i+1}$ $(m_{i,i+1} \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\})$. Pour i dans $\mathbf{Z}/r$, le link de tout sommet de type $\{i; i+1\}$ est un $m_{i,i+1}$-gone généralisé de paramètres (q_i, q_{i+1}). Les appartements sont des pavages de $\mathbb{H}^2$ par R.

(2) Les immeubles $I_{p,q}$ sont des cas particuliers du premier exemple. On les obtient en prenant pour R le p-gone régulier d'angle $\pi/2$, ce qui impose $p \geqslant 5$. Les links de tous les sommets sont des q-graphes bipartis complets et $\underline{q}$ est constante égale à $q-1$. Leurs bords $\partial I_{p,q}$ sont connus topologiquement et jouissent d'une structure quasi-conforme étudiée dans [Bou_1] et [Bou_2]. Des techniques d'analyse singulière sur les $\partial I_{p,q}$ permettent à M. Bourdon et H. Pajot de mettre en évidence des inégalités de Poincaré et de prouver la rigidité des quasi-isométries des $I_{p,q}$ [BP_1 et BP_2].

Remarque. L'indice q dans la notation $I_{p,q}$ est trompeuse du point de vue algébrique. En effet, il résultera de la proposition 2.3 qu'un immeuble $I_{p,q}$ est de

Kac–Moody si et seulement si les épaisseurs de ses cloisons sont toutes égales à un cardinal de droite projective fixé.

1.3. CONVENTIONS

Les notations et conventions qui suivent sont souvent propres à ce travail.

(A) On privilégiera systématiquement les réalisations métriques des immeubles. Un immeuble fuchsien est ainsi la réunion de pavages de Poincaré du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Dans le cas Kac–Moody, on notera Δ_ε l'immeuble métrique qui réalise l'immeuble combinatoire de signe ε de G. La réunion disjointe $\Delta := \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ est l'ensemble sous-jacent au jumelage de G.

(B) L'usage d'une combinatoire jumelée suggère de représenter un appartement jumelé comme un cône double au-dessus de l'espace qui représente l'appartement d'un immeuble de signe fixé. Ainsi, les racines de l'appartement jumelé sont des moitiés de ce double cône, qui tracent sur les deux réalisations du groupe de Weyl des demi-appartements complémentaires.

(C) Si A est une matrice de Cartan généralisée, $\underline{G}_A$ désigne le foncteur-groupe simplement connexe qui lui est associé [T_1, p. 550–551].

2. Construction d'immeubles hyperboliques

Cette section présente les contraintes et des techniques de construction d'immeubles hyperboliques. Une méthode géométrique fournit des réseaux cocompacts avec les immeubles, et met en évidence une certaine flexibilité. Les techniques provenant de la théorie de Kac–Moody sont ensuite décrites. Elles fournissent aussi des réseaux, non cocompacts cette fois.

2.1. CONTRAINTES

Il y a plusieurs types de contraintes d'existence pour les immeubles hyperboliques.

Rappelons d'abord qu'un *polyèdre de Poincaré* hyperbolique est un polyèdre convexe dans un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, dont tous les angles diédraux (i.e., le long des faces de codimension deux) sont de la forme π/n, avec n entier $\geqslant 2$. Un tel polyèdre est aussi appelé *polyèdre de Coxeter* dans la référence [Mar, Appendix C 1.7], d'où sont tirées les informations qui suivent. On en retient de très fortes restrictions concernant la question de leur existence. Les voici pour les polyèdres compacts – voir *loc. cit.* pour le cas du volume fini.

> « Un espace hyperbolique de dimension $\geqslant 30$ ne contient pas de polyèdre de Poincaré compact. On ne connaît pas de polyèdre de Poincaré hyperbolique compact en dimension $\geqslant 8$. »

La première assertion est un théorème d'E. Vinberg. C'est une contrainte pratique, qui ne limite pourtant pas le rang des immeubles qu'on peut construire, puisque la dimension de ces espaces est indépendante du rang de leur groupe de Weyl. L'exemple le plus parlant est celui des immeubles $I_{p,q}$, de dimension 2 et de rang $p \geqslant 5$ arbitrairement grand. En fait, le point essentiel réside en ceci:

> « Les links des sommets d'un immeuble hyperbolique de dimension n sont des immeubles finis de rang n. »

En enchaînant la remarque précédente avec des résultats classiques sur les immeubles sphériques, on en déduit des contraintes assez fortes sur les paramètres.

SCHOLIE. (i) *Dans un immeuble hyperbolique de dimension $n \geqslant 3$, les links des sommets sont des immeubles de groupes finis de type Lie. En particulier, les épaisseurs sont nécessairement de la forme $1 + p^k$, avec p premier et k entier $\geqslant 1$.*

(ii) *Dans un immeuble hyperbolique de dimension 2, les links des sommets sont des m-gones généralisés, soumis par conséquent aux conditions du théorème de Feit–Higman. En particulier, m vaut 2, 3, 4, 6 ou 8, et 8 est exclu dans le cas de constante épaisseur.* □

2.2. MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES

Un moyen d'obtenir des immeubles hyperboliques consiste à prendre le revêtement d'un *complexe de groupes*: cette notion [BH, III.$\mathcal{C}$] est la généralisation en dimension supérieure des graphes de groupes de la théorie de Bass–Serre. Elle consiste à attacher un groupe à chaque simplexe de la subdivision barycentrique d'un polyèdre, et à relier ces groupes par des flèches compatibles à sa géométrie. D. Gaboriau et F. Paulin [GP] ont déterminé des critères locaux nécessaires et suffisants pour que le revêtement d'une telle donnée soit un immeuble hyperbolique. Cette méthode est précieuse au moins pour deux raisons. D'abord, parce que pour un choix convenable de groupes, elle fournit avec l'immeuble un réseau cocompact; ensuite parce que c'est un résultat d'existence à partir duquel une méthode de découpage et recollement permet de construire une infinité non dénombrable d'immeubles. D'après [GP, théorème 3.5], on ne peut donc espérer produire tous les immeubles hyperboliques grâce aux groupes de Kac–Moody. Cela dit, F. Haglund [H] a récemment proposé des invariants géométriques qui permettent de formuler et d'obtenir des résultats d'unicité et d'homogénéité pour ces immeubles.

2.3. IMMEUBLES HYPERBOLIQUES ET THÉORIE DE KAC–MOODY

D'après ce qui précède, le problème est plutôt de produire un specimen d'immeuble hyperbolique pour une forme de chambre et des épaisseurs fixées. On peut répondre dans certains cas.

PROPOSITION. *Soit P un polyèdre de Poincaré hyperbolique, dont les angles dièdres non nuls sont de la forme π/m avec $m = 2, 3, 4$ ou 6, et ayant éventuellement des sommets à l'infini. Soit $p^k > 1$ une puissance première.*

(i) *Il existe un immeuble de Kac–Moody, d'épaisseur constante égale à* $1 + p^k$ *et qui possède une réalisation métrique où les appartements sont des espaces hyperboliques pavés par P.*
(ii) *Cet immeuble est un espace géodésique complet et* CAT(−1).

Démonstration. On joue sur deux paramètres indépendants. D'une part, la matrice de Cartan généralisée détermine le même modèle d'appartement pour tout corps. La condition d'angle assure que chacune des flèches du diagramme de Coxeter est étiquetée par une valeur de sortie de la correspondance Dynkin → Coxeter de 1.1. D'où (au moins) une matrice de Cartan généralisée A par lecture inverse (non univoque) de ce tableau. D'autre part, le corps $\mathbf{K}$ intervient au niveau de l'épaisseur, qui vaut $1 + \# \mathbf{K}$ d'après la condition de Moufang [R, 6.4]. Cette condition prescrit le cardinal $q = p^k$ pour le corps de base. Le groupe candidat est donc $G = \underline{G}_A(\mathbf{F}_q)$. Pour voir que ce groupe permet la construction des immeubles voulus, on procède pour chaque signe à un *recollement le long des facettes* d'exemplaires de $\mathbb{H}^n$. C'est un moyen standard d'obtenir une réalisation géométrique d'immeubles de groupes au moyen d'un modèle convenable d'appartement. (Il s'applique par exemple aux systèmes de Tits affines, avec un pavage d'espace euclidien comme modèle d'appartement.)

Précisément, on voit $\mathbb{H}^n$ comme réalisation géométrique du complexe de Coxeter associé au groupe de pavage W. Le sous-groupe N y opère via son quotient $W = N/T$. Chaque point x de $\mathbb{H}^n$ est sur une facette wF_J de type J, transformée par $w \in W$ de la face F_J de type J du polyèdre P. On attache à x le sous-groupe parabolique $G_x := wP_{\varepsilon,J}w^{-1}$ ($P_{\varepsilon,J}$ est le sous-groupe parabolique standard $B_\varepsilon W_J B_\varepsilon$, défini à partir du sous-groupe spécial $W_J := \langle J \rangle < W$). On définit alors l'espace cherché par

$$\Delta_\varepsilon := \frac{G \times \mathbb{H}^n}{\sim},$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence

$$(g, x) \sim (g', x') \iff \text{il existe } n \text{ dans } N \text{ tel que } x' = nx \text{ et } g^{-1}g'n \in G_x.$$

Il est classique que la décomposition de Bruhat de signe ε de G met en évidence le premier axiome des immeubles hyperboliques. Le second est vérifié grâce aux propriétés des rétractions. Ceci prouve (i), et (ii) est prouvé en remplaçant un espace euclidien par un espace hyperbolique dans la démonstration de [Br, VI.3]. □

EXEMPLE. Les immeubles $I_{p,q}$ sont des immeubles de Kac–Moody pourvu que q soit de la forme «1 + puissance première»: c'est une conséquence de l'unicité de ces immeubles [Bou1, 2.2].

Remarques. (1) L'énoncé précédent ne se limite pas aux modèles de chambre compacts, ce qui incite à travailler sur la définition élargie des immeubles hyperboliques [GP] déjà évoquée en 1.2.

(2) Pour tout le vocabulaire métrique, on peut consulter [BH] ou [GH]. Les immeubles construits sont en particulier hyperboliques au sens de Gromov.

(3) Comme on l'a déjà dit dans l'introduction, la nature Kac–Moody de ces immeubles permet de mettre en évidence des réseaux non uniformes [CG, Ré$_1$]. Précisément, pour un cardinal de corps q assez grand, le groupe de Kac–Moody est un réseau du produit (des groupes d'automorphismes complets) de ses deux immeubles, et les sous-groupes paraboliques sphériques négatifs (resp. positifs) sont des réseaux de l'immeuble positif (resp. négatif).

(4) Pour obtenir des immeubles d'épaisseur non constante, il faut comme en théorie de Bruhat–Tits pour les immeubles euclidiens, considérer des groupes de Kac–Moody non déployés [Ré$_2$]. Un exemple amusant est donné par un groupe de Kac–Moody quasi-déployé dont la géométrie associée est un arbre jumelé semi-homogène. On peut voir cette paire d'arbres comme lieu de points fixes sous une involution de Galois, à l'intérieur de la réunion de deux immeubles hyperboliques de type $I_{p,q}$ [Ré$_2$, 13.3.3].

3. Factorisation d'isomorphismes abstraits

Le résultat qui suit met en évidence une factorisation des isomorphismes abstraits entre certains groupes de Kac–Moody de même immeuble. Le modèle concernant les groupes algébriques est un théorème de Steinberg, qui factorise complètement les automorphismes de groupes de Chevalley sur un corps fini [C, 12.5.1].

3.1. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

Soient G et G' deux groupes de Kac–Moody définis sur le même corps fini $\mathbf{F}_q$ de cardinal $q \geqslant 4$. À chacun d'eux est associée une paire d'immeubles isomorphes, construite par exemple à partir de leurs données radicielles jumelées standard respectives $\big(\{U_\alpha(q)\}, T(q)\big)$ et $\big(\{U'_\alpha(q)\}, T'(q)\big)$.

THÉORÈME. *On se donne un isomorphisme abstrait $\imath$ de G' sur G, et on suppose que les quatre immeubles obtenus sont tous isomorphes à un même type parmi les deux cas suivants.*

($\star$) *Un arbre localement fini.*

($\star\star$) *Un immeuble fuchsien de type $(R, \underline{q})$, pour un même r-gone régulier $R \subset \mathbb{H}^2$.*

Alors, il existe un élément g de G, un signe ε et une permutation $\imath^*$ des indices de racines simples, tels que $\mathrm{int} g^{-1} \circ \imath$ *échange les sous-groupes de Cartan standard et envoie le groupe radiciel d'indice i et de signe $\pm$ sur le groupe radiciel d'indice $\imath^* i$ et de signe $\varepsilon\pm$.*

Remarques. (1) On se référera toujours à l'appartement jumelé standard $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}'$) du groupe de Kac–Moody G (resp. G'). Le *groupe radiciel d'indice i et de signe* $\pm$ est le sous-groupe radiciel indexé par la racine simple d'indice i, ou par son opposée si le signe en question est $-$.

(2) La géométrie naturellement associée à un groupe de Kac–Moody consiste en une paire d'immeubles *automatiquement isomorphes*. C'est la richesse des informations tirées de l'action diagonale du groupe sur le produit des deux immeubles qui fait l'intérêt de la théorie des jumelages. (Limiter l'action du groupe à un seul de ses immeubles fait perdre la moitié des informations combinatoires.) En ce qui concerne le théorème, l'hypothèse portant sur l'isomorphie des quatre immeubles ne fait rien d'autre que requérir l'égalité de deux classes d'isomorphisme d'immeubles (associées à G et G').

DÉFINITION. (i) Étant données deux racines α et β, on désignera par $L_{\alpha,\beta}(q)$ le sous-groupe de G engendré par le sous-groupe de Cartan correspondant à $\mathbb{A}$ et par les quatre groupes radiciels indexés par $\{\pm\alpha; \pm\beta\}$.

(ii) S'il est fini, le sous-groupe $L_{\alpha,\beta}(q)$ sera appelé *sous-groupe réductif de rang* 2. Pour des racines simples, on parlera de sous-groupe réductif standard *de rang* 2.

(iii) On définit aussi les *sous-groupes réductifs (standard) de rang* 1 à partir d'une seule paire de racines opposées.

(iv) Mutatis mutandis, on définit les mêmes sous-groupes dans G' en agrémentant les notations d'un $'$.

Remarque. Quand les racines de définition sont simples, on met en indice les numéros des racines plutôt que les racines elles-mêmes.

3.2. PRÉLIMINAIRES

La restriction aux deux types d'immeubles ($\star$) et ($\star\star$) fournit quelques propriétés supplémentaires.

(A) On va utiliser des propriétés abstraites des groupes réductifs finis déployés de rang 1 et 2 sur $\mathbf{F}_q$. Ces groupes possèdent naturellement un jumelage fini de Moufang: ce sont des groupes de Kac–Moody pour un choix de matrice de Cartan généralisée de type fini. On a intérêt à remplacer les considérations de sous-groupes de Borel par celles de p-sous-groupes de Sylow. Le sous-groupe unipotent du sous-groupe de Borel standard est un p-Sylow d'après un calcul de cardinal effectué par exemple dans [R, 8.6]. Le normalisateur de ce sous-groupe est précisément le sous-groupe de Borel de départ. Par conjugaison des p-Sylow, on a donc un dictionnaire:

$$\{p-\text{Sylow}\} \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{Sous-groupes de Borel}\}.$$

Le passage d'un p-Sylow à un sous-groupe de Borel se fait par prise de normalisateur, et l'opération réciproque par prise de l'unique p-Sylow du sous-groupe de Borel. On peut aussi lire la relation d'opposition entre sous-groupes de Borel sur les p-Sylow associés. D'après la décomposition de Bruhat, l'intersection de deux sous-groupes de Borel est, à conjugaison près, le produit semi-direct du sous-groupe de Cartan standard et d'un produit interne de groupes radiciels relatifs à ce sous-groupe. Deux sous-groupes de Borel sont opposés si et seulement si leur intersection ne comporte pas de groupe radiciel, autrement dit pas de p-sous-groupe. Ceci se traduit par le fait que les p-Sylow associés s'intersectent trivialement.

(B) Dans les cas $(\star)$ et $(\star\star)$, la prénilpotence des paires de racines s'interprète agréablement à la fois au niveau des groupes et de la géométrie des immeubles associés. Soit $\{\alpha;\beta\}$ une paire de racines non opposées.

Au niveau des groupes: si $\{\alpha;\beta\}$ n'est pas prénilpotente, par [T_2, proposition 5] le produit libre des groupes radiciels $U_\alpha(q)$ et $U_\beta(q)$ s'injecte dans le groupe de Kac–Moody; à l'inverse, si la paire est prénilpotente, le groupe engendré par ces groupes radiciels est contenu dans le produit interne fini des groupes radiciels $U_\gamma(q)$ pour γ dans l'intervalle $[\alpha;\beta]$. Puisqu'on travaille sur des corps finis, on a donc:

$$\{\alpha;\beta\} \text{ prénilpotente} \iff \#\langle U_\alpha(q), U_\beta(q)\rangle < \infty.$$

Géométriquement: $\{\alpha;\beta\}$ est prénilpotente si et seulement si chacune des intersections $\alpha\cap\beta$ et $(-\alpha)\cap(-\beta)$ contient une chambre. C'est un critère général qui se lit de façon particulièrement simple sur une droite découpée en segments ou sur un pavage de $\mathbb{H}^2$. Si la paire de racines non opposées $\{\alpha;\beta\}$ est dans $\mathbb{H}^2$, les quatre paires de racines non opposées de $\{\pm\alpha;\pm\beta\}$ sont prénilpotentes si et seulement si les murs $\partial\alpha$ et $\partial\beta$ sont sécants. En combinant les remarques sur les cardinaux et sur la géométrie, on obtient pour un immeuble fuchsien:

Les quatre paires de racines non opposées de $\{\pm\alpha;\pm\beta\}$ sont prénilpotentes

$$\iff \partial\alpha \quad \text{et} \quad \partial\beta \text{ sont sécants} \iff \#L_{\alpha,\beta}(q) < \infty.$$

3.3. DÉMONSTRATION

On va procéder en plusieurs étapes. Pour chaque affirmation, le symbole $(\star)$ ou $(\star\star)$ indique le cas auquel se réfère l'assertion. Rappelons enfin (1.3.B) qu'un appartement jumelé peut être vu comme un double cône au dessus du modèle – droite ou plan hyperbolique – d'appartement.

L'inégalité $q \geqslant 4$ n'est autre que l'hypothèse « corps assez gros » de [Ré$_2$, 8.4.1]. Elle a pour conséquences les faits suivants:

$$N = N_G\big(T(q)\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{A} = (\Delta_+ \sqcup \Delta_-)^{T(q)},$$

voir [Ré$_2$, propositions 8.4.1 et 10.1.3]. Nous verrons systématiquement N comme le normalisateur du sous-groupe de Cartan standard, ou de manière équivalente comme le stabilisateur de l'appartement jumelé standard.

Grâce à l'isomorphisme abstrait $\imath$ entre G et G', on fait opérer G' sur les immeubles Δ_+ et Δ_- de G, et diagonalement sur leur somme Δ.

LEMME 1. ($\star$) *Les sous-groupes réductifs de rang* 1 *de* G' *s'envoient par* $\imath$ *sur des sous-groupes du même type de* G, *et* $\imath$ *échange les sous-groupes de Cartan.*

($\star\star$) *Les sous-groupes réductifs de rang* 2 *de* G' *s'envoient par* $\imath$ *sur des sous-groupes du même type de* G, *et* $\imath$ *échange les sous-groupes de Cartan.*

Preuve. Quitte à inverser $\imath$, on suppose tout d'abord qu'on a $\#T'(q) \geqslant \#T(q)$. On va voir de toute façon qu'il y a égalité, si bien que cet aménagement est finalement non restrictif.

Cas ($\star\star$). Soit $L'_{i,i+1}(q)$ un sous-groupe réductif standard de rang 2 de G'. C'est un groupe d'isométries fini de Δ_+ et de Δ_-. Il fixe donc un point x_+ dans Δ_+ et un point x_- dans Δ_-. En composant $\imath$ par un automorphisme intérieur de G, on se ramène au cas où la paire de points $\Omega := \{x_-; x_+\}$ est contenue dans l'appartement jumelé $\mathbb{A}$ de $\Delta_+ \sqcup \Delta_-$. On sait que le fixateur de Ω possède une décomposition de Lévi relative à $\mathbb{A}$ [Ré$_2$, 6.4.1]:

$$\mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega) \ltimes U(\Omega).$$

Le groupe $M(\Omega)$ possède une donnée radicielle jumelée, il est engendré par le sous-groupe de Cartan attaché à $\mathbb{A}$ et les groupes radiciels indexés par les paires de racines opposées de $\mathbb{A}$ dont les murs contiennent Ω. Plus concrètement, c'est le groupe des $\mathbf{F}_q$-points d'un groupe réductif déployé de rang 2, de rang 1 ou d'un tore. Le groupe $U(\Omega)$ est le sous-groupe engendré par les groupes radiciels indexés par la partie nilpotente (donc finie) des racines de $\mathbb{A}_+$ séparant x_+ de l'opposé $-x_-$ de x_- dans $\mathbb{A}_+$ – cf. 1.3.B. C'est un groupe unipotent sur $\mathbf{F}_q$, donc un p-sous-groupe distingué de $\mathrm{Fix}(\Omega)$.

Revenons à l'inclusion $\imath\big(L'_{i,i+1}(q)\big) < \mathrm{Fix}(\Omega)$. Puisque $\imath\big(L'_{i,i+1}(q)\big)$ ne contient pas de p-sous-groupe distingué, on a $\imath\big(L'_{i,i+1}(q)\big) \cap U(\Omega) = \{1\}$. Par conséquent, $\imath\big(L'_{i,i+1}(q)\big)$ s'identifie à un sous-groupe de $M(\Omega)$. La taille des p-Sylow impose à $M(\Omega)$ d'être de rang 2, et donc à x_+ et x_- d'être des sommets opposés. Ainsi, $U(\Omega)$ est trivial et $\mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega)$.

On s'intéresse maintenant à $\imath\big(T'(q)\big)$. Le groupe $T'(q)$ normalise deux p-Sylow d'intersection triviale de $L'_{i,i+1}(q)$. D'après ce qu'on vient de voir et puisqu'on travaille sur le même corps fini $\mathbf{F}_q$, les images par $\imath$ de ces p-Sylow sont des p-Sylow de $M(\Omega)$. Ainsi, $\imath\big(T'(q)\big)$ normalise deux p-Sylow d'intersection triviale de $M(\Omega)$, il est donc dans l'intersection de deux sous-groupes de Borel opposés, autrement dit dans un sous-groupe de Cartan de $M(\Omega)$. En conjugant par un élément de $M(\Omega)$, on peut supposer qu'on a $\imath\big(T'(q)\big) < T(q)$. Par l'hypothèse de cardinalité faite au début et par injectivité de $\imath$, on obtient $\imath\big(T'(q)\big) = T(q)$. D'où l'égalité des cardinaux annoncée au début, et la seconde assertion.

Les groupes $L'_{i,i+1}(q)$ et $\mathrm{Fix}(\Omega)$ sont tous deux réductifs déployés sur un même corps fini, et de même rang. Leurs cardinaux ne diffèrent éventuellement que par la taille d'un sous-groupe de Cartan, par exemple d'après le calcul de [R, 8.6] déjà évoqué en 3.2.A. On a donc aussi l'égalité $\imath\big(L'_{i,i+1}(q)\big) = \mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega)$.

Cas $(\star)$. C'est le même type de raisonnement que pour $(\star\star)$, en plus simple puisque l'image $\iota\big(L_i'(q)\big)$ fixe un point de chaque signe et est non résoluble. Vu la décomposition de Lévi de tels fixateurs, les points sont nécessairement des sommets opposés. Le reste du raisonnement sur les p-Sylow est identique. □

Dans les deux cas, on rectifie ι par un automorphisme intérieur de G de façon à avoir échange des sous-groupes de Cartan standard.

Remarques. (1) Les points fixes de $M(\Omega)$ sont nécessairement contenus dans $\mathbb{A} = \Delta^{T(q)}$. Par le même raisonnement que pour la position relative des points x_- et x_+, on en déduit que ces sommets sont les seuls points fixes sous $M(\Omega)$ dans Δ.

(2) L'isomorphisme ι échange les sous-groupes de Cartan standard, donc leurs normalisateurs, et par conséquent induit un isomorphisme des groupes de Weyl, qu'on désignera par la même lettre.

LEMME 2. $(\star)$ *Une symétrie par rapport à un sommet s'envoie sur une symétrie par rapport à un sommet. Un sous-groupe radiciel s'envoie sur un sous-groupe radiciel.*

$(\star\star)$ *Une symétrie par rapport à un mur s'envoie sur une symétrie par rapport à un mur. Un sous-groupe radiciel s'envoie sur un sous-groupe radiciel.*

Preuve. Cas $(\star\star)$. On s'intéresse tout d'abord aux sous-groupes radiciels. Soit η' une racine de G'. On choisit deux racines β' et γ' dont les murs coupent $\partial\eta'$. Le groupe $L'_{\eta',\beta'}(q)$ (resp. $L'_{\eta',\gamma'}(q)$) s'envoie sur le fixateur d'une paire de sommets opposés de $\mathbb{A} = \Delta^{T(q)}$. On a:

$$\iota\big(L'_{\eta',\beta'}(q)\big) = \mathrm{Fix}(\{\pm\partial\alpha \cap \partial\beta\}) \quad \text{et} \quad \iota\big(L'_{\eta',\gamma'}(q)\big) = \mathrm{Fix}(\{\pm\partial\delta \cap \partial\gamma\}).$$

L'image $\iota\big(L'_{\eta'}(q)\big)$ est dans le fixateur de la partie symétrique à quatre points $\{\pm\partial\alpha \cap \partial\beta\} \cup \{\pm\partial\delta \cap \partial\gamma\}$, et est isomorphe à un groupe réductif de rang 1 sur $\mathbf{F}_q$. Par le même raisonnement que pour le lemme 1 sur les décompositions de Lévi, $\partial\alpha \cap \partial\beta$ et $\partial\delta \cap \partial\gamma$ doivent être contenus dans un même mur $\partial\eta$ pour assurer l'existence d'un facteur de Lévi assez gros. En outre, $L'_{\eta'}(q)$ doit s'envoyer sur $L_\eta(q)$. Enfin, $\iota\big(U_{\eta'}(q)\big)$ est un p-Sylow de $L_\eta(q)$, normalisé par $T(q)$; c'est $U_\eta(q)$ ou $U_{-\eta}(q)$. Un sous-groupe radiciel s'envoie bien sur un sous-groupe radiciel.

Soit α' une racine de G'. Tout élément de G' relevant la symétrie par rapport au mur $\partial\alpha'$ est dans le sous-groupe réductif $L'_{\alpha'}(q)$, qui va s'envoyer dans un sous-groupe réductif $L_\alpha(q)$ de G. L'image par ι d'un tel élément sera dans le normalisateur $N_{L_\alpha(q)}\big(T(q)\big)$: cette image relève la symétrie par rapport au mur $\partial\alpha$.

Cas $(\star)$. La première assertion provient du dernier point ci-dessus, la seconde résulte de la même prise en compte des p-Sylow que pour $(\star\star)$. □

Remarque. La démonstration ci-dessus prouve que pour toute racine α' de G' par rapport à T', on a $\iota(-\alpha') = -\iota(\alpha')$.

On désignera encore par ι l'injection ainsi établie des racines de G' vers celles de G, et on note $\eta_i := \iota(\alpha'_i)$ pour $i = 0$ ou 1, ou pour i dans $\mathbf{Z}/r$, suivant le cas.

LEMME 3. ($\star$) *Ou bien* $\eta_0 \cap \eta_1$, *ou bien* $(-\eta_0) \cap (-\eta_1)$ *est un intervalle non vide* I *du droit chemin* $\mathbb{A}_+ = \mathbf{R}$. *Son adhérence est une réunion d'arêtes fermées.*

($\star\star$) *Ou bien* $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}/r} \eta_i$, *ou bien* $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}/r}(-\eta_i)$ *est un r-gone* Q *non vide de* $\mathbb{A}_+ = \mathbb{H}^2$. *Son adhérence est une réunion de chambres fermées.*

Preuve. *Cas* ($\star$). C'est une conséquence immédiate des interprétations (3.2.B) de la prénilpotence des paires de racines.

Cas ($\star\star$). Là aussi, on va utiliser en permanence les interprétations (3.2.B) de la prénilpotence des paires de racines. Les murs $\partial\eta_1$ et $\partial\eta_3$ sont nécessairement parallèles car la paire $\{\eta_1; \eta_3\}$ n'est pas prénilpotente. Deux cas seulement peuvent alors se produire: ou bien $\eta_1 \cap \eta_3$, ou bien $(-\eta_1) \cap (-\eta_3)$ est non vide. Enfin, comme $\{\eta_1; \eta_3\}$ n'est pas prénilpotente, il n'y a pas de relation d'inclusion entre η_1 et η_3.

On suppose $\eta_1 \cap \eta_3 \neq \varnothing$, donc que cette intersection est une bande de $\mathbb{H}^2$ et que le mur $\partial\eta_3$ est contenu dans le demi-espace η_1. Puisque la paire $\{\eta_1; \eta_4\}$ n'est pas prénilpotente, les murs $\partial\eta_1$ et $\partial\eta_4$ sont parallèles. Les murs $\partial\eta_3$ et $\partial\eta_4$ sont eux sécants, par le même argument de prénilpotence. Ainsi, $\partial\eta_4$ est dans η_1 et $\eta_4 \cap \eta_1$ est une bande de $\mathbb{H}^2$. En remplaçant η_3 par η_4, on montre que $\partial\eta_5$ est dans η_1 et que $\eta_5 \cap \eta_1$ est une bande de $\mathbb{H}^2$. On itère ce raisonnement jusqu'à η_{r-1}. Enfin, $\partial\eta_r$ (resp. $\partial\eta_2$) est une sécante commune à $\partial\eta_{r-1}$ et $\partial\eta_1$ (resp. $\partial\eta_1$ et $\partial\eta_3$) par prénilpotence de toutes les paires de racines impliquées.

L'intersection de ces demi-espaces est non vide. En effet, on peut choisir un disque D centré au milieu du segment porté par $\partial\eta_1$ et limité par les intersections avec $\partial\eta_2$ et $\partial\eta_r$, suffisamment petit pour qu'il ne coupe que $\partial\eta_1$. Par convexité, $D \cap \eta_1$ est dans tous les demi-espaces η_i pour $3 \leqslant i \leqslant r-1$, et est par définition dans η_r et η_2.

Le second cas, où l'intersection des racines $-\eta_1$ et $-\eta_3$ est non vide, conduit par le même raisonnement à $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}/r}(-\eta_i) \neq \varnothing$. Il en résulte que $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}/r} \eta_i$ ou bien $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}/r}(-\eta_i)$ est non vide.

L'adhérence de cette partie est définie comme intersection d'adhérences de racines: c'est une réunion de chambres fermées. □

Quitte à conjuguer, cette fois par un élément de $N = N_G(T(q))$, on peut supposer pour ($\star\star$) que le r-gone Q contient la chambre standard de $\mathbb{A}_+$, et pour ($\star$) que l'intervalle I contient l'arête standard E de $\mathbb{A}_+$. Dans ce dernier cas, on note y_j le sommet attaché à la racine η_j, pour $j = 0$ ou 1.

LEMME 4. ($\star$) *L'intervalle* I *est exactement l'arête standard* E *de* $\mathbb{A}_+ = \mathbf{R}$.

($\star\star$) *Le r-gone* Q *est exactement la chambre standard de* $\mathbb{A}_+ = \mathbb{H}^2$.

Preuve. *Cas* ($\star\star$). On utilise ici une propriété spécifique de la géométrie hyperbolique, à savoir que dans $\mathbb{H}^2$, la somme des angles aux sommets et l'aire d'un polygone se déterminent mutuellement [Be, 19.5.4]. Précisément, si S est la somme de ces angles, l'aire d'un r-gone est $\pi(r-2) - S$. Il suffit alors de remarquer que l'angle aux sommets de la chambre standard est minimal parmi les angles entre murs du pavage de Poincaré de $\mathbb{H}^2$, pour en déduire tout d'abord que tous les angles aux sommets de Q doivent être minimaux, et pour conclure par égalité des aires.

Cas ($\star$). L'isomorphisme $\imath$ envoie la donnée radicielle jumelée standard de G' sur une donnée radicielle jumelée de G, dont les groupes radiciels sont des groupes radiciels de la donnée radicielle jumelée standard de G. On parlera momentanément de *donnée radicielle jumelée image*. Puisque le corps de base $\mathbf{F}_q$ est assez gros, cette donnée radicielle jumelée dans G vérifie la condition abstraite (CENT) de [Ré$_2$, 1.2.5], à savoir que le sous-groupe de Cartan ne centralise aucun groupe radiciel. Cette condition (CENT) est vérifiée par G', et $\imath$ la transporte; elle assure que le normalisateur de $T(q)$ est le groupe engendré par $T(q)$ et les éléments relevant modulo $T(q)$ les symétries associées aux racines de la donnée radicielle jumelée image. Ainsi, les réflexions relatives à y_0 et y_1 doivent engendrer W, ce qui impose $\{\eta_0; \eta_1\} = \pm\{\alpha_0; \alpha_1\}$, suivant que I vaut $\eta_0 \cap \eta_1$ ou bien $(-\eta_0) \cap (-\eta_1)$. □

CONCLUSION. $\imath$ opère éventuellement par une permutation des étiquettes, qu'on note $\imath^*$. On obtient donc $\imath\big(T'(q)\big) = T(q)$; et suivant qu'on est dans le premier ou dans le second cas du lemme 3, $\imath\big(U'_{\alpha'_i}(q)\big)$ vaut $U_{\imath^*(i)}(q)$ ou $U_{-\imath^*(i)}(q)$. □

Remarque. Le dernier lemme utilise un raisonnement typiquement hyperbolique. Même en restant dans le cadre des pavages du plan $\mathbb{H}^2$, regarder des immeubles à chambres non régulières ajoute des complications combinatoires à l'argument géométrique. Pour voir que l'argument seul n'est plus valable, il suffit de recoller deux triangles d'angles $(\pi/2, \pi/6, \pi/6)$ en un triangle d'angles $(\pi/3, \pi/6, \pi/6)$. La régularité du r-gone assure qu'une réunion de chambres avec le même nombre de côtés, ne peut contenir strictement une chambre.

4. Groupes non abstraitement isomorphes de même immeuble

Le choix de relèvement de matrice de Coxeter en matrice de Cartan généralisée effectué dans la preuve de 2.3 soulève la question du nombre de classes d'isomorphisme de groupes de Kac–Moody pour un même type d'immeuble. Le résultat précédent de factorisation montre que plusieurs classes peuvent effectivement fournir la même géométrie. La présence de coefficients ∞ dans les matrices de Coxeter est essentielle.

Précisément, on va montrer qu'un immeuble fuchsien ou un arbre peut provenir de deux groupes de Kac–Moody non abstraitement isomorphes. Définissons pour cela des matrices de Cartan généralisées convenables. Pour tout entier $m \geqslant 2$, on note A_m la matrice de Cartan généralisée définie par

$$A_m := \begin{pmatrix} 2 & -m \\ -m & 2 \end{pmatrix}$$

dans le cas ($\star$), et dans le cas ($\star\star$), par $A_{ii+1} := 0$ et $A_{ij} := -m$ si i et j ne sont ni égaux ni consécutifs modulo r. On désigne par $G_m(q)$ le groupe $\underline{G}_{A_m}(\mathbf{F}_q)$ – voir 1.3.C. Dans ce dernier cas, on suppose qu'on a $r \geqslant 5$, si bien que les immeubles du jumelage associé sont des arbres homogènes de valence $1+q$ ou des immeubles fuchsiens à angles droits d'épaisseur constante égale à $1+q$.

Remarque. Si on s'intéresse aux groupes d'automorphismes d'immeubles, il faut diviser les groupes précédents par leur centre. Le centre d'un groupe de Kac–Moody est l'ensemble fini des éléments du sous-groupe de Cartan standard dont l'action (par conjugaison) sur tous les groupes radiciels est triviale. Les quotients correspondants sont munis des données radicielles jumelées fournies par les quotients des sous-groupes des données radicielles jumelées de départ, et on peut leur appliquer le théorème 3.1 précédent. Du point de vue des notations, on surligne les groupes quotientés par leur centre.

PROPOSITION. *Soient m et m' deux entiers $\geqslant 2$ tels que* $\mathrm{pgcd}(m, q-1) \neq \mathrm{pgcd}(m', q-1)$. *Alors, les groupes $G_m(q)$ et $G_{m'}(q)$ sont non abstraitement isomorphes. Si m et m' sont de même parité, les groupes d'automorphismes $\overline{G}_m(q)$ et $\overline{G}_{m'}(q)$ ne sont pas abstraitement isomorphes non plus.*

Démonstration. D'après les relations de définition d'un groupe de Kac–Moody [T_1, p. 549], à chaque indice i est associé un sous-groupe multiplicatif à un paramètre $h_i(\mathbf{F}_q^\times) := \{k^{h_i}\}_{k\in\mathbf{F}_q{}^\times}$, qui opère sur les groupes radiciels par une puissance du paramètre. Pour une racine simple, l'exposant de cette puissance est le coefficient correspondant dans la matrice de Cartan généralisée. Soient i et j deux indices distincts, non consécutifs modulo r dans le cas ($\star\star$). On considère le produit semi-direct $h_i(\mathbf{F}_q^\times) \ltimes U_j(\mathbf{F}_q)$. Pour $G_m(q)$, le centralisateur de $U_j(\mathbf{F}_q)$ dans ce sous-groupe est le produit direct de $U_j(\mathbf{F}_q)$ et des racines $m^{\text{èmes}}$ de l'unité de $\mathbf{F}_q$. Par le théorème 3.1 et sous l'hypothèse d'existence d'un isomorphisme, on devrait avoir échange des données radicielles jumelées standard, donc des groupes radiciels simples et sous-groupes à un paramètre correspondants [T_1, p. 549]. C'est impossible par la remarque qui précède et par l'hypothèse faite sur les pgcd.

Ceci règle le cas des groupes simplement connexes. Pour les groupes effectifs sur les immeubles, on remarque que pour toute racine, le sous-groupe à un paramètre multiplicatif associé opère sur le groupe radiciel correspondant par le carré du paramètre. Ces sous-groupes multiplicatifs s'injectent dans $\overline{G}_m(q)$ si m est impair, ou leurs images en sont des quotients par $\{\pm 1\}$ si m est pair. Le raisonnement de cardinalité précédent est encore valable moyennant cette modification. $\square$

Remarque. Dans le cas ($\star\star$) des immeubles fuchsiens, il reste à ajouter que toutes les matrices A_m donnent naissance au même immeuble $I_{r,q+1}$, par unicité [Bou1, 2.2].

Remerciement

La section 4 de cet article répond à une question posée par F. Paulin au cours d'un exposé fait à l'Université Paris XI. J'ai plaisir à le remercier à cette occasion pour l'invitation et pour la question. Ce travail a été effectué alors que je travaillais à l'Université H. Poincaré-Nancy 1.

Références

[A] Abramenko, P.: *Twin Buildings and Applications to S-Arithmetic Groups*, Lecture Notes in Math. 1641, Springer, New York, 1996.

[Be] Berger, M.: *Géométrie 2*, Fernand Nathan, 1990.

[BH] Bridson, M. et Haefliger, A.: *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Grund. Math. Wiss. 319, Springer, Berlin, 1999.

[BM_1] Burger, M. et Mozes, S.: Groups acting on trees: from local to global structure, Prépubl. IHÉS, 1999.

[BM_2] Burger, M. et Mozes, S.: Lattices in products of trees, Prépubl. IHÉS, 1999.

[Bou1] Bourdon, M.: Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), 245–268.

[Bou2] Bourdon, M.: Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isométrie, *Erg. Theory Dynam. Systems* (à paraître), 1997.

[BP_1] Bourdon, M. et Pajot, H.: Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings, *Proc. Amer. Math. Soc.* (à paraître), 1998.

[BP_2] Bourdon, M. et Pajot, H.: Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings, Prépubl., 1999.

[BS] Ballmann, W. et Swiatkowski, J.: On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes. *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), 615–645.

[C] Carter, R.: *Simple Groups of Lie Type*, Wiley, New York, 1972.

[CG] Carbone, L. et Garland, H.: Lattices in Kac–Moody groups, *Math. Res. Lett.* **6** (1999), 439-448.

[DJ] Dymara, J. et Januszkiewicz, T.: New Kazhdan groups, Prépubl. Univ. Wroclaw, 1999.

[GH] Ghys, E. et de la Harpe, P.: *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Math. 83, Birkhäuser, Basel, 1990.

[GP] Gaboriau, D. et Paulin, F.: Sur les immeubles hyperboliques, Prépubl. Univ. Paris 11, 1998.

[H] Haglund, F.: Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques, Prépubl. Univ. Paris 11, 1999.

[Mar] Margulis, G. A.: *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, Springer, New York, 1990.

[Mas] Maskit, B.: *Kleinian Groups*, Grund. der Math. Wiss. 287, Springer, New York, 1987.

[MR] Mühlherr, B. et Ronan, M.: Local to global structure in twin buildings, *Invent. Math.* **122** (1995), 71–81.

[Mü] Mühlherr, B.: Locally split and locally finite buildings of 2-spherical type, *J. Reine angew. Math.* **511** (1999), 119–143.

[$Ré_1$] Rémy, B.: Construction de réseaux en théorie de Kac–Moody, *C.R. Acad. Sci. Paris* **329** (1999), 475–478.

[$Ré_2$] Rémy, B.: Formes presque déployées des groupes de Kac–Moody sur des corps quelconques, thèse Univ. Nancy 1, 1999.

[R] Ronan, M.: *Lectures on Buildings*, Academic Press, New York, 1989.

[T_1] Tits, J.: Uniqueness and presentation of Kac–Moody groups over fields, *J. Algebra* **105** (1987), 542–573.

[T_2] Tits, J.: Théorie des groupes, *Annu. du Collège de France*, année 89–90, 87–103.