C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 475-478, 1999
Théorie des groupes/*Group Theory*

Construction de réseaux en théorie de Kac–Moody

Bertrand RÉMY

Institut Élie-Cartan, Université Henri-Poincaré–Nancy I, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France
Courriel : bertrand.remy@iecn.u-nancy.fr

(Reçu et accepté le 19 juillet 1999)

Résumé. On montre qu'un groupe de Kac–Moody (*voir* [10]) sur un corps fini assez gros est un réseau (non uniforme) du groupe localement compact des automorphismes du produit des immeubles de son jumelage. Le même argument prouve qu'un sous-groupe parabolique sphérique est un réseau (non uniforme) du groupe des automorphismes de l'immeuble de signe opposé. © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Construction of lattices in Kac–Moody theory

Abstract. *We show that a Kac–Moody group* (see [10]) *over a sufficiently large finite field is a (non-uniform) lattice in the locally compact automorphism group of the product of the buildings of its twinning. The same argument proves that a spherical parabolic subgroup is a (non-uniform) lattice in the automorphism group of the building of opposite sign.* © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Présentation

La définition fonctorielle proposée par J. Tits permet de construire des groupes de Kac–Moody sur des corps arbitraires. Cette définition est basée sur une généralisation du théorème bien connu de R. Steinberg qui fournit une présentation des groupes semi-simples simplement connexes. Interviennent notamment une matrice de Cartan généralisée $A \in \mathbf{Z}^{S\times S}$ indexée par un ensemble fini S et un corps de base $\mathbf{K}$. Une référence pour tout ce qui concerne les groupes de Kac–Moody est [10].

Un tel groupe G est à considérer dans le cadre combinatoire des *données radicielles jumelées*, qui est le raffinement des BN-paires ajusté à la situation. Le groupe G possède un groupe de Weyl W complètement déterminé par la matrice A. La contrepartie géométrique (combinatoire) est l'existence d'*immeubles jumelés*. Cette notion consiste en la donnée de deux immeubles dits *positifs* et *négatifs* (sur lesquels G opère), et d'une relation d'opposition entre les chambres de ceux-ci. Une référence pour les données radicielles jumelées et les immeubles jumelés est [1].

On fixe maintenant un corps fini $\mathbf{F}_q$, un groupe de Kac–Moody G_q de matrice de Cartan généralisée A et défini sur $\mathbf{F}_q$. On combine les remarques précédentes à la construction de M. Davis et

Note présentée par Jacques TITS.

0764-4442/99/03290475

G. Moussong [4], pour obtenir une réalisation métrique $|\mathcal{I}_\varepsilon|_{\text{mét}}$ de l'immeuble $\mathcal{I}_\varepsilon$ de signe ε de G_q. Ce complexe cellulaire métrique est à courbure négative au sens de [3], ne représente que les facettes sphériques et est localement fini par choix du corps. Son groupe d'automorphismes Aut_ε est donc localement compact totalement discontinu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On choisit une mesure invariante. Enfin, G_q opère sur chaque immeuble et diagonalement sur leur produit via le quotient $\overline{G}_q$ par son centre (fini), contenu dans tout tore maximal de G_q.

THÉORÈME 1. – *Soit* $\sum_{n\geq 0} d_n\, t^n$ *la fonction de croissance du groupe de Weyl* W *de* G_q. *On suppose que la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{q^n}$ *converge. Alors :*

(i) *le fixateur dans* $\overline{G}_q$ *d'un point de l'immeuble négatif* $|\mathcal{I}_-|_{\text{mét}}$ *est un réseau du groupe* Aut_+ *;*
(ii) *le groupe* $\overline{G}_q$ *lui-même est un réseau du groupe produit* $\mathrm{Aut}_+ \times \mathrm{Aut}_-$.

Ces réseaux ne sont pas cocompacts.

2. Quelques résultats sur les groupes de Kac–Moody

Nous pouvons momentanément revenir au cas d'un corps de base général $\mathbf{K}$. On désigne par G un groupe de Kac–Moody défini sur $\mathbf{K}$ et de matrice de Cartan généralisée A. Il possède deux BN-paires opposées (B_+, N) et (B_-, N) ; on note $\mathcal{J}$ le jumelage qui lui est associé. Le sous-groupe N contient le tore maximal $T = B_+ \cap B_-$ et le sous-quotient N/T est isomorphe au groupe de Weyl W. L'ensemble sous-jacent à l'immeuble $\mathcal{I}_\varepsilon$ vu comme système de chambres est G/B_ε ; la structure d'immeuble provient de la décomposition de Bruhat de signe ε (*voir* [7]). L'appartement jumelé standard est l'ensemble $\mathbf{A} := \{wB_+\}_{w\in W} \sqcup \{wB_-\}_{w\in W}$, et tout autre appartement jumelé est de la forme $g\mathbf{A}$, pour g dans G. Ces affirmations sont prouvées par exemple dans les deux premiers chapitres de [1].

2.1. Domaines fondamentaux

Une conséquence facile de la décomposition de Birkhoff de G est que deux chambres de signes opposés du jumelage de G sont toujours dans un appartement jumelé. En faisant opérer ensuite le groupe de Weyl associé, il vient qu'un système complet de représentants des chambres de $G \setminus (\mathcal{I}_+ \times \mathcal{I}_-)$ est donné par $\{(B_+, wB_-)\}_{w\in W}$. Pour l'action d'un sous-groupe parabolique, la description est moins facile à obtenir, c'est un résultat de J. Tits prouvé dans [9] (*voir* aussi [1], lemme 6, p. 32). Pour toute partie J de S, le sous-ensemble convexe $\bigcap_{s\in J} \alpha_s \subset \mathbf{A}$ est un domaine fondamental pour l'action de $B_- W_J B_-$ sur $\mathcal{I}_+$. (On désigne par α_s la racine de $\mathbf{A}$ qui contient B_+ sans contenir sB_+.)

2.2. Décompositions de Lévi

On note $|\mathcal{J}|_{\text{mét}}$ la somme topologique des réalisations métriques $|\mathcal{I}_+|_{\text{mét}}$ et $|\mathcal{I}_-|_{\text{mét}}$. Un appartement jumelé et sa réalisation métrique sont désignés par la même lettre. Voici un cas particulier du théorème 6.4.1 de [6].

THÉORÈME 2. – *On se donne* x_+ *et* x_- *deux points de signes opposés de* $|\mathcal{J}|_{\text{mét}}$, *ainsi qu'un appartement jumelé* $\mathbf{A}$ *qui les contient. Alors, le fixateur dans* G *de ces points possède une décomposition en produit semi-direct*

$$\mathrm{Fix}(\{x_+ ; x_-\}) = M(\mathbf{A}, \{x_+ ; x_-\}) \ltimes U(\{x_+ ; x_-\}),$$

où $M(\mathbf{A}, \{x_+ \,;\, x_-\})$ *est un groupe abstraitement isomorphe à un groupe réductif sur le corps* $\mathbf{K}$, *et* $U(\{x_+ \,;\, x_-\})$ *est un groupe unipotent en bijection avec le produit d'un nombre fini d'exemplaires du corps* $\mathbf{K}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un corps de base fini $\mathbf{F}_q$. Une conséquence de ce résultat est que les sous-groupes paraboliques sphériques de signe fixé sont proprement discontinus sur l'immeuble métrique de signe opposé. Considérons deux sous-groupes de Borel de signes opposés. Ce sont les fixateurs de deux points intérieurs à des chambres de signes opposés. Si on s'intéresse seulement à des ordres de groupes, on peut supposer par homogénéité que ces chambres sont dans l'appartement jumelé standard $\mathbf{A}$ et même qu'une des chambres – la positive (resp. la négative) – est standard. On est donc ramené au cas $B_+ \cap wB_-w^{-1}$ (resp. $B_- \cap wB_+w^{-1}$). La décomposition de Lévi relative à $\mathbf{A}$ prend la forme plus précise suivante :

$$B_+ \cap wB_-w^{-1} = T \ltimes U_w \text{ (resp. } B_- \cap wB_+w^{-1} = T \ltimes U_{-w}\text{)},$$

où T est un tore sur $\mathbf{F}_q$ et U_w (resp. U_{-w}) est un groupe unipotent sur $\mathbf{F}_q$ en bijection avec le produit de $\ell(w)$ copies de $\mathbf{F}_q$. Ce dernier dévissage peut aussi être obtenu à partir de [10], proposition 3 (iii), p. 565.

3. Démonstration du théorème 2

Il est inoffensif de travailler sur G_q plutôt que sur $\overline{G}_q$. Déjà, les groupes considérés sont discrets en vertu de § 2.2, et la non-compacité des domaines fondamentaux dans chacun des deux cas justifie la dernière assertion. Appelons *distance numérique* entre deux chambres, la longueur d'une galerie minimale les joignant. On se place dans l'appartement jumelé standard et on fixe la paire standard de chambres opposées $\{B_+ \,;\, B_-\}$. On identifie systématiquement le système de Coxeter associé à W et l'appartement positif $\mathbf{A}_+ = \{wB_+\}_{w \in W}$. Un fixateur de point négatif contient le fixateur de toute chambre contenant ce point dans son adhérence. On peut donc se contenter de regarder un sous-groupe de Borel négatif pour prouver le premier cas.

On va maintenant appliquer un critère « de type Serre » qui requiert la convergence d'une série ([8], p. 116). Précisément, d'après [2], proposition (1.D.2), la série à examiner est

$$\sum_{d_+ \in \mathbf{A}_+} \frac{1}{\#\mathrm{Stab}_{B_-}(d_+)} \qquad \text{dans le premier cas,}$$

et

$$\sum_{d_+ \in \mathbf{A}_+} \frac{1}{\#\mathrm{Stab}_{G_q}(B_- \,;\, d_+)} \qquad \text{dans le second cas.}$$

Cela dit, d'après l'égalité

$$\mathrm{Stab}_{G_q}(B_- \,;\, d_+) = \mathrm{Fix}_{G_q}(B_- \,;\, d_+) = \mathrm{Fix}_{G_q}(B_-) \cap \mathrm{Fix}_{G_q}(d_+) = B_- \cap \mathrm{Fix}_{G_q}(d_+),$$

on travaille en fait sur la même série $\sum_{w \in W} \frac{1}{\#\mathrm{Stab}_{B_-}(wB_+)}$. C'est à ce stade qu'on utilise le cas particulier de la décomposition de Lévi. On a $\mathrm{Stab}_{B_-}(wB_+) = B_- \cap wB_+w^{-1} = T \ltimes U_{-w}$. Mais T est un groupe fini, disons d'ordre t, et U_w est un groupe fini d'ordre $q^{\ell(w)}$. On réarrange alors les termes de la série en fonction de la distance entière de B_+ à wB_+, qui vaut $\ell(w)$:

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} \frac{1}{\#\mathrm{Stab}_{B_-}(wB_+)} &= \sum_{w \in W} \frac{1}{\#(B_- \cap wB_+w^{-1})} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\ell(w)=n} \frac{1}{\#(T \ltimes U_{-w})} \right) = \frac{1}{t} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\ell(w)=n} \frac{1}{q^n} \right). \end{aligned}$$

Par définition, il y a d_n chambres à distance numérique n de B_+, ce qui fournit la dernière modification de la série :

$$\frac{1}{t}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\ell(w)=n}\frac{1}{q^n}\right)=\frac{1}{t}\sum_{n\geq 0}\frac{d_n}{q^n}.$$

Le résultat découle alors immédiatement de l'hypothèse qu'on a faite. □

Remarque. – Comme $d_n \leq (\#S)^n$, la condition de convergence est vérifiée au moins pour q supérieur à $\#S$.

4. Exemple et commentaire

Exemple. – Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ est un groupe de Kac–Moody de type affine $\widetilde{A}_{n-1}$, défini sur le corps $\mathbf{F}_q$. La proposition citée au § 2.2 généralise le théorème de Soulé qui montre que le domaine fondamental de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t^{-1}])$ dans l'immeuble affine de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q((t)))$ est un quartier. Puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q((t)))$ est cocompact dans le groupe d'automorphismes de cet immeuble, notre résultat dans ce cas recoupe le théorème de Behr et Harder concernant les sous-groupes S-arithmétiques sur les corps de fonctions, avec $S=\{0\}$ (*voir* [5], théorème 3.2.4, p. 63). Le groupe de Kac–Moody $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ lui-même est un sous-groupe $\{0\,;\infty\}$-arithmétique de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q(t))$ ([5], p. 61).

Cet exemple incite à voir les groupes de Kac–Moody comme des généralisations de groupes $\{0\,;\infty\}$-arithmétiques (*voir* [1]). Cela pose la question de la pertinence et de la validité des propriétés classiques des sous-groupes discrets des groupes de Lie (réels, complexes ou p-adiques, *voir* [5]). Les analogues de ces derniers sont les groupes d'automorphismes des immeubles de Kac–Moody (localement finis). Plusieurs points argumentent en faveur de cette approche. On pense d'une part aux résultats de type super-rigidité, Howe–Moore... sur les groupes d'automorphismes d'arbres (Burger, Mozes, Lubotzky...), et d'autre part aux critères géométriques concernant la propriété (T) de Kazhdan (Ballmann, Dymara, Januszkiewicz, Pansu, Swiatkowski, Zuk...).

Remerciements. Merci à Marc Bourdon et à Guy Rousseau. Chacun m'a initié avec patience à sa pratique des immeubles. Lisa Carbone et Howard Garland m'ont adressé une version préliminaire de leur travail *Lattices in Kac–Moody groups*, où des résultats très proches sont annoncés. Je les remercie de la chaleureuse correspondance que nous avons échangée à cette occasion.

Références bibliographiques

[1] Abramenko P., Twin buildings and applications to S-arithmetic groups, Lect. Notes in Math. 1641, Springer-Verlag, 1996.
[2] Bourdon M., Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isométrie, Erg. Theory and Dynam. Syst. (à paraître).
[3] Bruhat F., Tits J., Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées, Publ. Math. IHÉS 41 (1972) 5–251.
[4] Davis M., Buildings are CAT(0), in: Geometry and cohomology in group theory, P.H. Kropholler, G.A. Niblo, R. Stöhr (Eds.), LMS Lect. Notes Series 252, 1997, pp. 108–123.
[5] Margulis G.A., Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Springer-Verlag, 1990.
[6] Rémy B., Formes des groupes de Kac–Moody sur des corps quelconques, Thèse, Université Nancy I, 1999.
[7] Ronan M., Lectures on buildings, Academic Press, 1989.
[8] Serre J.-P., Arbres, amalgames, SL_2, Astérique 46, Soc. Math. France, 1977.
[9] Tits J., Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées, Bull. Soc. Math. Belgique 38 (1986) 367–387.
[10] Tits J., Uniqueness and presentation of Kac–Moody groups over fields, J. Algebra 105 (1987) 542–573.